



ANÁLISIS DE SISTEMAS DE POTENCIA

CURSO DE SISTEMAS DE POTENCIA

DOCUMENTO IEB 0189-99-010



Itagüí, mayo - junio de 1999

INTERCONEXIÓN ELÉCTRICA S.A. E.S.P.**PROYECTO: ANÁLISIS DE SISTEMAS DE POTENCIA****CONTRATO: 0189-99****REVISIÓN Y APROBACIÓN:**

Título documento: CURSO DE SISTEMAS DE POTENCIA						
Documento No.: IEB 0189-99-010						
R E S P O N S A B L E S	NÚMERO DE REVISIÓN		0	1	2	3
	Elaboración	Nombre	JABD/MMC			
		Firma				
		Fecha	(99/04/12)			
	Aprobación	Nombre	JDAA			
		Firma				
		Fecha	(99/04/19)			
	Auditoría	Nombre	WZC			
		Firma				
		Fecha	(99/04/20)			

JABD Jaime Alberto Blandón Díaz

JDAA José Dariel Arcila Arias

MMC Mónica María Cardona

WZC William Zapata Cifuentes

LISTA DE DISTRIBUCIÓN

Copias de este documento han sido entregadas a las siguientes dependencias:

	Empresa	Copias
Ing.		
Ing.		
Ing.		

Las observaciones que resulten de su revisión y aplicación deben ser informadas a IEB S.A. para proceder a realizar sus modificaciones.

TABLA DE CONTENIDO

1. SISTEMAS EN P.U	1
2. COMPONENTES SIMÉTRICAS.....	10

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Diagrama unifilar - ejemplo 1.....	3
Figura 2. Sistema en p.u.....	6
Figura 3. Diagrama Unifilar - Práctica 1.1.....	7
Figura 4. Diagrama Unifilar - Práctica 1.2.....	8
Figura 5. Representación de un cambio de referencia	10
Figura 6. Representación de la relación ortonormal.....	10
Figura 7. Representación fasorial	11
Figura 8. Ejemplo - componentes simétricas.....	11
Figura 9. Representación del operador a.....	12

1. SISTEMAS EN P.U

El valor “por unidad” de una cantidad cualquiera es la razón de un valor en unidades reales y el valor base tomado para el caso.

Una cantidad A en p.u de una base A_b es $\frac{A}{A_b} = A_{p.u}$ (no tiene unidades)

La cantidad AB en p.u es:

$$\frac{AB}{A_b B_b} = A_{p.u} \times B_{p.u}$$

Ventajas de trabajar en p.u:

- Se “pierden” los niveles de tensión.
- Se elimina la relación de transformación en los cálculos con transformadores de potencia.
- En p.u se tipifican ciertos parámetros eléctricos de los equipos (por ejemplo las impedancias) de tal forma que no son indispensables los datos de placa de los elementos para realizar ciertos análisis.

En la práctica, se definen dos cantidades base:

$$MVA_{BASE} \Rightarrow S_{BASE}$$

$$V_{LBASE}$$

En este sistema de normalización se supone que todos los sistemas están conectados en Y.

Para pasar un sistema trifásico a p.u se debe:

1. Definir una potencia base S_B . En sistemas de alta tensión, es razonable definir como potencia base 100 MVA.
2. Definir un voltaje base V_B en un punto del sistema o en una barra.
3. Se calculan los demás voltajes bases del sistema con las relaciones de transformación de los transformadores.

4. Se calculan las impedancias de cada elemento en la nueva base.

Las reactancias que el fabricante suministra del transformador y del generador deberán pasarse a la nueva base.

$$X_{p.u, placa} = \frac{X_{real}(\Omega)}{Z_{base, placa}}$$

$$X_{real}(\Omega) = X_{p.u, placa} \times Z_{base, placa}$$

$$X_{p.u, nueva} = \frac{X_{real}}{Z_{base, nueva}}$$

$$X_{p.u, nueva} = \frac{X_{p.u, placa} \times Z_{base, placa}}{Z_{base, nueva}}$$

En general:

$$Z_B = \frac{V_B^2}{S_B}$$

$$X_{p.u, nueva} = \frac{X_{p.u, placa} \left(\frac{V_B^2, placa}{S_B, placa} \right)}{\frac{V_B^2, nueva}{S_B, nueva}}$$

$$X_{p.u, nueva} = X_{p.u, placa} \left(\frac{V_B, placa}{V_B, nueva} \right)^2 \times \left(\frac{S_B, nueva}{S_B, placa} \right)$$

Análogamente,

$$R_{p.u, nueva} = R_{p.u, placa} \left(\frac{V_B, placa}{V_B, nueva} \right)^2 \times \left(\frac{S_B, nueva}{S_B, placa} \right)$$

Ejercicio:

Para el sistema de la Figura 1 calcular el sistema en p.u:

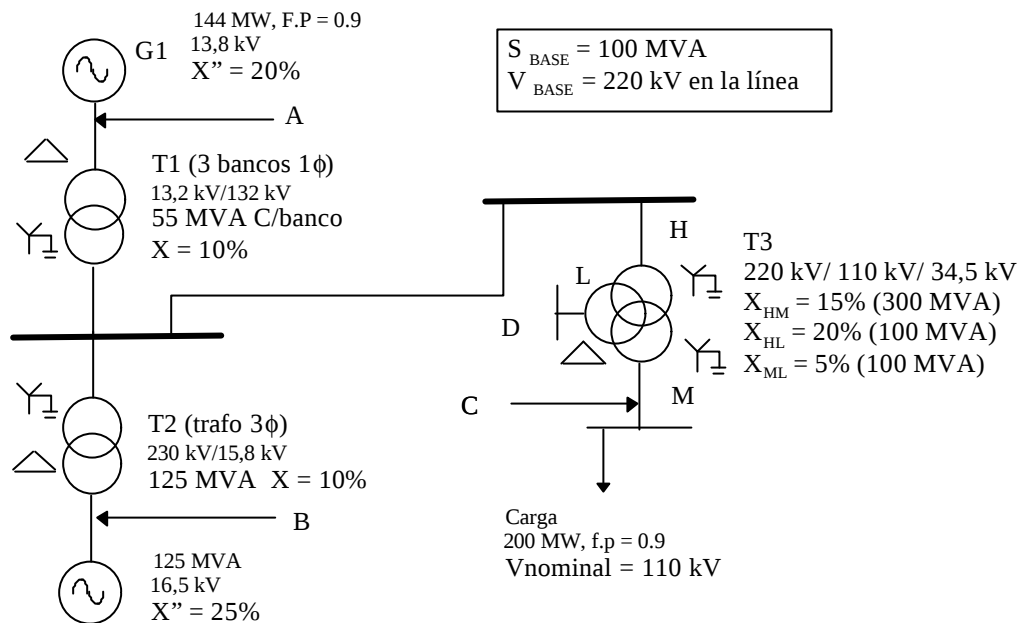


Figura 1. Diagrama unifilar - ejemplo 1

Solución:

1. Antes de calcular el sistema en p.u, se recalcularán algunos datos de placa.

Para G1:

$$S_N = \frac{144 \text{ MW}}{0.9} = 160 \text{ MVA}$$

$$V_N (L - L) = 13.8 \text{ kV}$$

$$X'' = 20\%$$

Para T1:

$$S_N (T3f) = 3 \times S_N (T1f)$$

$$S_N (T3f) = 3 \times 55 \text{ MVA} = 165 \text{ MVA}$$

$$\text{Relación de transformación: } \frac{13.2 \text{ kV}}{132 \times \sqrt{3} \text{ kV}} = \frac{13.2 \text{ kV}}{228.62 \text{ kV}}$$

$X = 10\%$ En un transformador tridevanado es la reactancia de una fase.

Carga:

$$P = 200 \text{ MW}$$

$$f.p = 0.9$$

$$V_N = 110 \text{ kV}$$

$$P = S \cos f \Rightarrow S = \frac{220 \text{ MW}}{f \cdot p} = \frac{200 \text{ MW}}{0.9} = 222,22 \text{ MVA}$$

$$Q = S \sin f \Rightarrow Q = 222,22 \text{ MVA} \times 0.43 = 96,86 \text{ M var}$$

2. Calcular los voltajes bases.

• **En A:**

$$V_{BASE} A = \frac{13,2 \text{ kV}}{228,62 \text{ kV}} \times V_{BASE \text{ EN LA LINEA}}$$

$$V_{BASE} A = \frac{13,2 \text{ kV}}{228,62 \text{ kV}} \times 220 \text{ kV} = 12,7 \text{ kV}$$

• **En B:**

$$V_{BASE} B = \frac{15,8 \text{ kV}}{230 \text{ kV}} \times V_{BASE \text{ EN LA LINEA}}$$

$$V_{BASE} B = \frac{15,8 \text{ kV}}{230 \text{ kV}} \times 220 \text{ kV} = 15,11 \text{ kV}$$

• **En C:**

$$V_{BASE} C = 110 \text{ kV}$$

El voltaje base 220 kV (que es el voltaje de la línea) es igual a uno de los voltajes nominales de los devanados del transformador tridevanado, lo que implica que los voltajes bases de cada devanado del transformador son iguales a sus voltajes nominales.

• **En D:**

$$V_{BASE} D = 34,5 \text{ kV}$$

3. Calculo de las impedancias en las nuevas bases.

En G1:

$$X_1'', nueva = X_1'', placa \left(\frac{V_B, placa}{V_B, nueva} \right)^2 \times \left(\frac{S_B, nueva}{S_B, placa} \right)$$

$$X_1'', nueva = 0.2 \left(\frac{13,8 \text{ kV}}{12,7 \text{ kV}} \right)^2 \times \left(\frac{100 \text{ MVA}}{160 \text{ MVA}} \right)$$

$$X_1'', nueva = 0.1476 \text{ p.u}$$

En G2:

$$X_2'', nueva = 0.25 \left(\frac{16,5 \text{ kV}}{15,11 \text{ kV}} \right)^2 \times \left(\frac{100 \text{ MVA}}{125 \text{ MVA}} \right)$$

$$X_2'', nueva = 0.2385 \text{ p.u}$$

En T1:

$$X, nueva = 0.1 \left(\frac{13,2 \text{ kV}}{12,7 \text{ kV}} \right)^2 \times \left(\frac{100 \text{ MVA}}{165 \text{ MVA}} \right)$$

$$X, nueva = 0.0655 \text{ p.u}$$

En T2:

$$X, nueva = 0.1 \left(\frac{15,8 \text{ kV}}{15,11 \text{ kV}} \right)^2 \times \left(\frac{100 \text{ MVA}}{125 \text{ MVA}} \right)$$

$$X, nueva = 0.0875 \text{ p.u}$$

Transformador tridevanado:

$$X_{HM}, nueva = 0.15 \left(\frac{220 \text{ kV}}{220 \text{ kV}} \right)^2 \left(\frac{100 \text{ MVA}}{300 \text{ MVA}} \right) = 0.05 \text{ p.u}$$

$$X_{HL}, nueva = 0.20 \left(\frac{34,5 \text{ kV}}{34,5 \text{ kV}} \right)^2 \left(\frac{100 \text{ MVA}}{100 \text{ MVA}} \right) = 0.20 \text{ p.u}$$

$$X_{ML, nueva} = 0.05 \left(\frac{110 \text{ kV}}{110 \text{ kV}} \right)^2 \left(\frac{100 \text{ MVA}}{100 \text{ MVA}} \right) = 0.05 \text{ p.u}$$

En la carga:

$$Z_C = \frac{(110 \text{ kV})^2}{222,22 \text{ MVA}} = 54,45 \Omega$$

$$Z_{BASE} = \frac{(220 \text{ kV})^2}{100 \text{ MVA}} = 484 \Omega$$

$$Z_C \text{ p.u} = \frac{54,45 \Omega}{484 \Omega} = 0.1125 \text{ p.u}$$

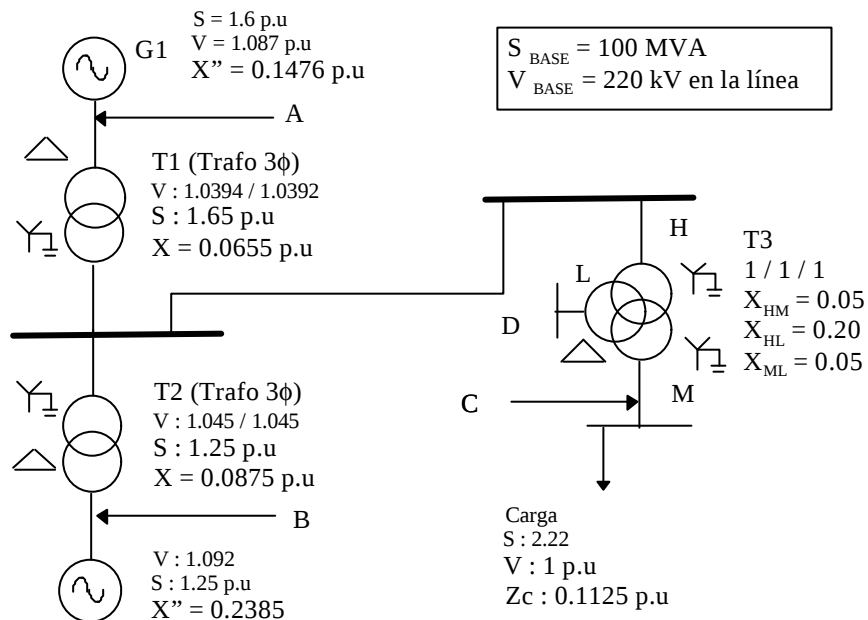


Figura 2. Sistema en p.u

Para el transformador tridevanado:

$$Z_H = \frac{1}{2}(0.05 + 0.2 - 0.05) = 0.1$$

$$Z_M = \frac{1}{2}(0.05 + 0.05 - 0.2) = -0.05$$

$$Z_L = \frac{1}{2}(0.2 + 0.05 - 0.05) = 0.1$$

PRÁCTICA 1:

1. Llevar el siguiente sistema a p.u de 220 kV, 100 MVA

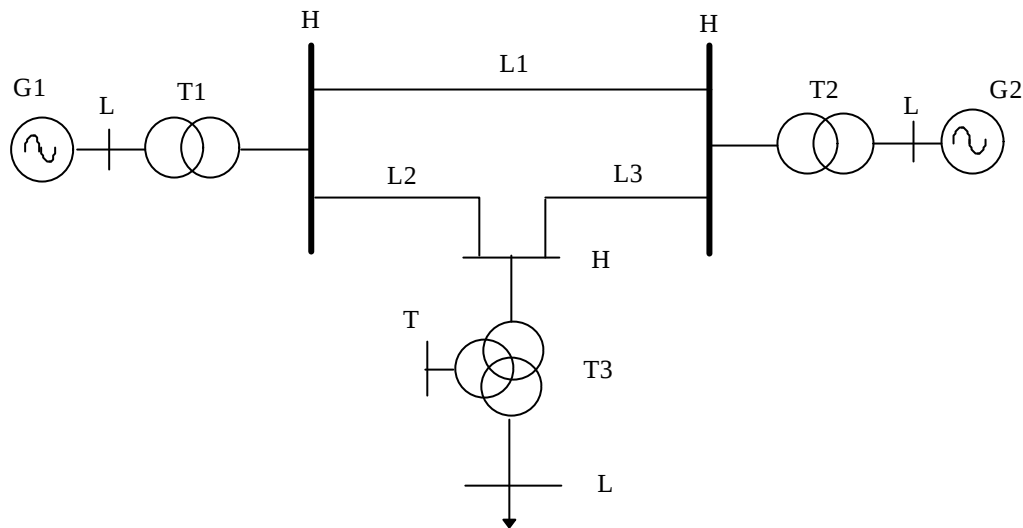


Figura 3. Diagrama Unifilar - Práctica 1.1

T1: Relación 13,8 kV / 230 kV 150 MVA / 150 MVA

$X = 18\%$ (base 13,8 kV, 150 MVA)

T2: Relación 220 kV / 15,0 kV 150 MVA / 150 MVA

$X = 10\%$ (base 15,0 kV, 150 MVA)

T3: Relación 230 kV / 115 kV / 34,5 kV 130 MVA / 130 MVA / 40 MVA

$X_{HL} = 11\%$ (130 MVA)

$X_{HT} = 13\%$ (40 MVA)

$X_{LT} = 15\%$ (40 MVA)

$L1 = 130$ km, $L2 = 60$ km, $L3 = 215$ km

$X_L = 0.5 \Omega/\text{km}$

$G1 = G2$, 135 MVA, 14.4 kV ; $X''d = 20\%$ (135 MVA, 14,4 kV)

2. Llevar el siguiente sistema a p.u de 220 kV, 100 MVA

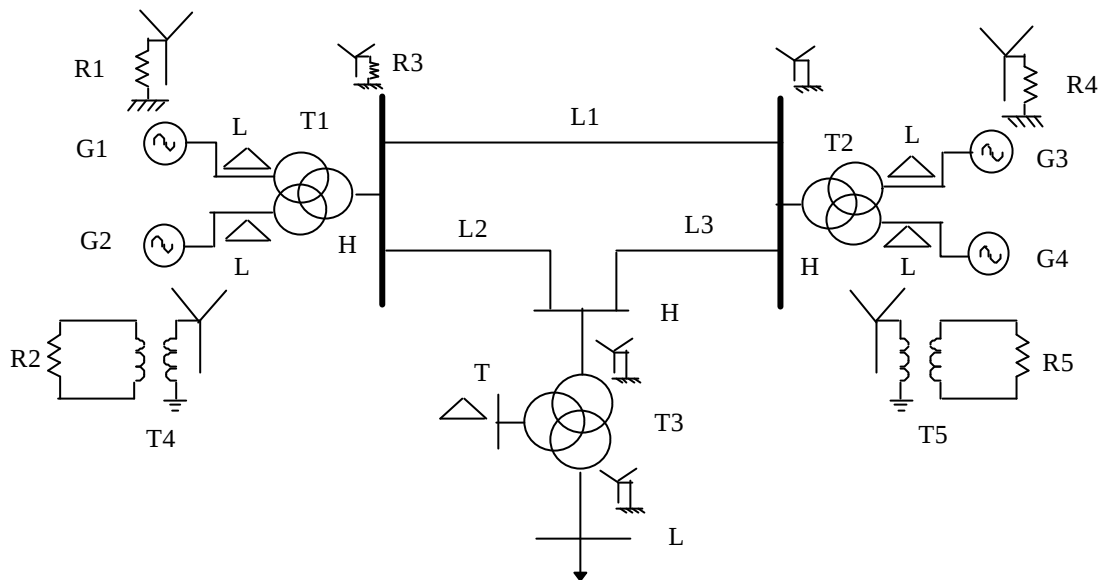


Figura 4. Diagrama Unifilar - Práctica 1.2

L1: 200 km $X1 = 0,53 \Omega/\text{km}$ $X0 = 1,2 \Omega/\text{km}$
 $R1 = 0,32 \Omega/\text{km}$ $R0 = 1,8 \Omega/\text{km}$

L2: 130 km (datos iguales a $X1$, $R1$, $X0$, $R0$)

L3: 80 km (datos iguales a $X1$, $R1$, $X0$, $R0$)

$G1 = G2$ $X''d = 20\%$ (Bases 13,8 kV, 100 MVA)

$G3 = G4$ $X''d = 15\%$ (Bases 15 kV, 90 MVA)

$R1 = 1600 \Omega$ $R2 = 0,53 \Omega$

$R4 = 2000 \Omega$ $R5 = 0.512 \Omega$

T1: 3 unidades monofásicas c/u: 70 / 35 / 35 MVA ; $\frac{230}{\sqrt{3}} / 13,8 / 13,8 \text{ kV}$

$X_{HL} = 15\%$ (Bases 35 MVA, 13,8 kV)

$X_{LL} = 30\%$ (Bases 35 MVA, 13,8 kV)

T2: Un transformador trifásico: 180 / 90 / 90 MVA ; 230 / 13,8 / 13,8 kV

$$X_{HL} = 17\% \text{ (Bases 90 MVA, 13,8 kV)}$$

$$X_{LL} = 36\% \text{ (Bases 90 MVA, 13,8 kV)}$$

T3: 3 autotransformadores monofásicos c/u: 150 / 150 / 50 MVA ; $\frac{220}{\sqrt{3}} / \frac{115}{\sqrt{3}} / 34,5 \text{ kV}$

$$X_{HL} = 11\% \text{ (Bases 150 MVA, } 220/\sqrt{3} \text{ kV)}$$

$$X_{HT} = 13\% \text{ (Bases 50 MVA, 34,5 kV)}$$

$$X_{LT} = 17\% \text{ (Bases 50 MVA, 34,5 kV)}$$

T4: 13,2 kV / 240 V $X = 2\%$ (Bases 150 kVA, 13,2 kV)

T5: 15 kV / 240 V $X = 3\%$ (Bases 200 kVA, 15 kV)

2. COMPONENTES SIMÉTRICAS

Es un cambio de referencia entre el dominio de las fases A, B y C al dominio de las secuencias 0, 1 y 2.

Aparecen a partir del Teorema de Fortescue (IEE - 1921).

Cualquier sistema n-fásico desbalanceado se puede transformar en n - sistemas n-fásicos simétricos (Ver Figura 5).

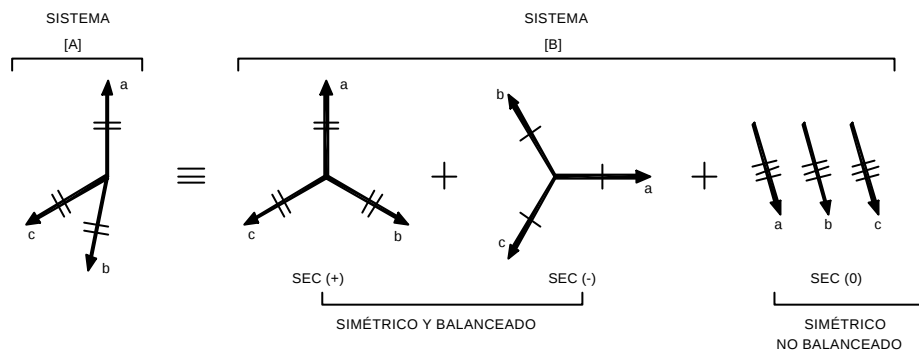


Figura 5. Representación de un cambio de referencia

La relación es biunívoca, es decir, que sólo hay una forma de pasar del Sistema A al Sistema B y viceversa.

Ejemplo:

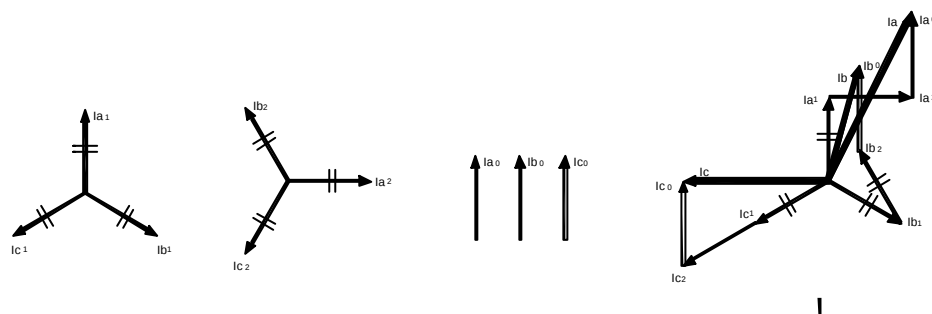


Figura 6. Representación fasorial

$$I_a = I_{a0} + I_{a1} + I_{a2}$$

$$I_b = I_{b0} + I_{b1} + I_{b2}$$

$$I_c = I_{c0} + I_{c1} + I_{c2}$$

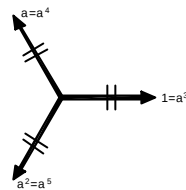


Figura 7. Representación de la relación ortonormal

Operador a:

$$I_a = I_{a0} + I_{a1} + I_{a2}$$

$$I_b = I_{a0} + a^2 I_{a1} + a I_{a2}$$

$$I_c = I_{a0} + a I_{a1} + a^2 I_{a2}$$

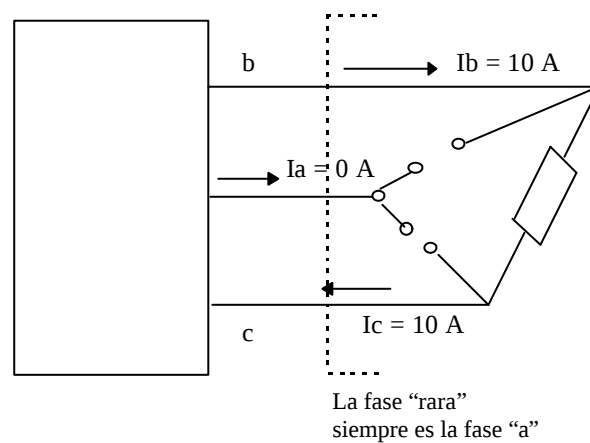


Figura 8. Ejemplo - componentes simétricas

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Para el ejemplo:

$$\begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$10 \angle 180^\circ \leftarrow$

$$I_{a0} = \frac{1}{3}(10 - 10) = 0 \quad \text{No involucra tierra}$$

$$I_{a1} = \frac{1}{3}(10a - 10a^2) = \frac{10}{3}(a - a^2) = \frac{10}{\sqrt{3}} \angle 90^\circ$$

$$I_{a2} = \frac{1}{3}(10a^2 - 10a) = \frac{10}{3}(a^2 - a)$$

$$I_{a1} = -I_{a2} = \frac{10}{\sqrt{3}} \angle -90^\circ$$

$$I_a = I_{a0} + I_{a1} + I_{a2} = 0 + \frac{10}{\sqrt{3}} \angle 90^\circ + \frac{10}{\sqrt{3}} \angle -90^\circ = 0$$

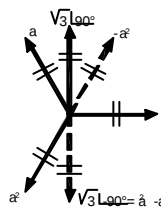


Figura 9. Representación del operador a

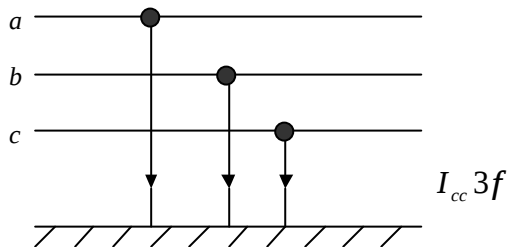
3. ANÁLISIS DE FALLAS EN UN SISTEMA ELÉCTRICO DE POTENCIA

Objeto: Cálculo de corrientes y voltajes cuando se presenten fallas

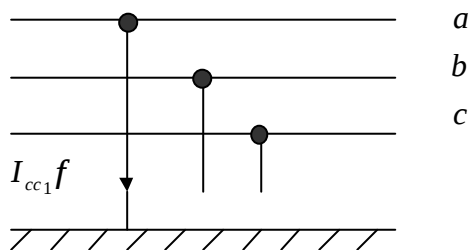
Objetivo del cálculo de corrientes: Diseño adecuado de las protecciones.

Tipos de Fallas

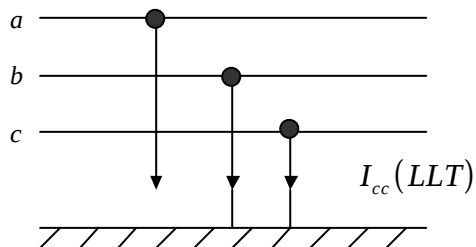
1. Falla trifásica (LLLT)



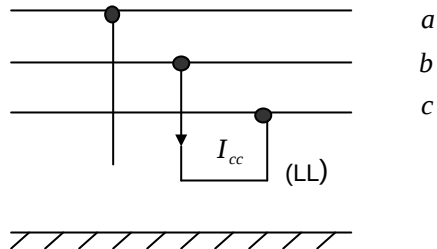
2. Falla Monofásica (LT)



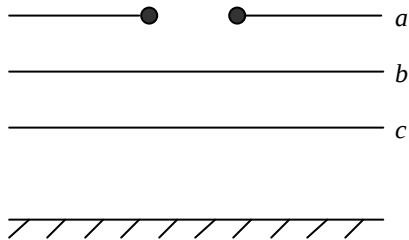
3. Falla Doble línea a tierra (LLT)



4. Falla línea a línea (L L)



5. Falla Serie



Los estudios de cortocircuito se van a dividir en dos dependiendo del sistema y del punto donde esta la falla.

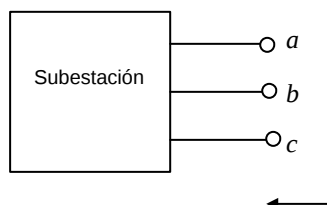
1. Estudio de cortocircuito en puntos alejados de generación
2. Corto circuito en bornes de generación.

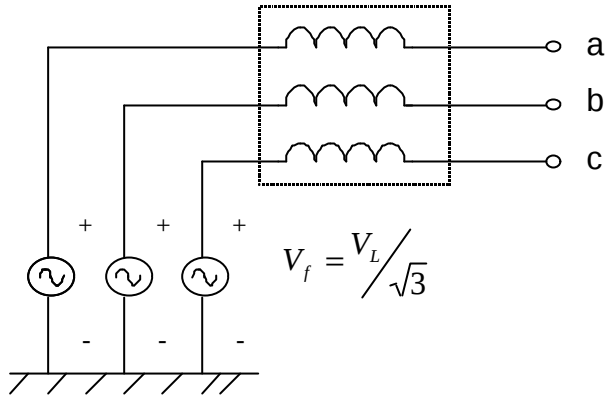
Nos centraremos en el primer punto

Cortocircuitos en puntos alejados de generación.

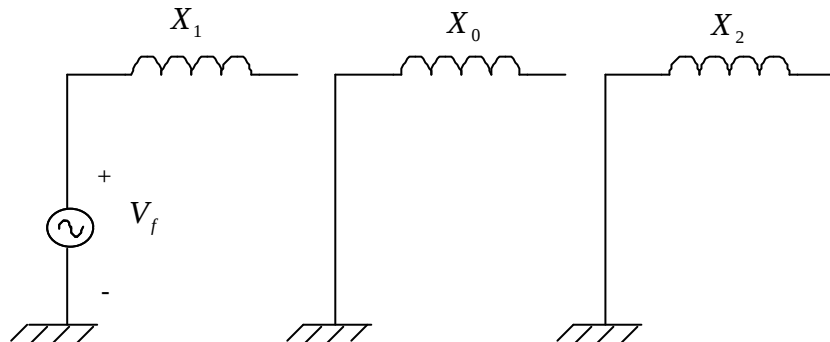
Elementos que intervienen :

1. Alimentador (o subestación)



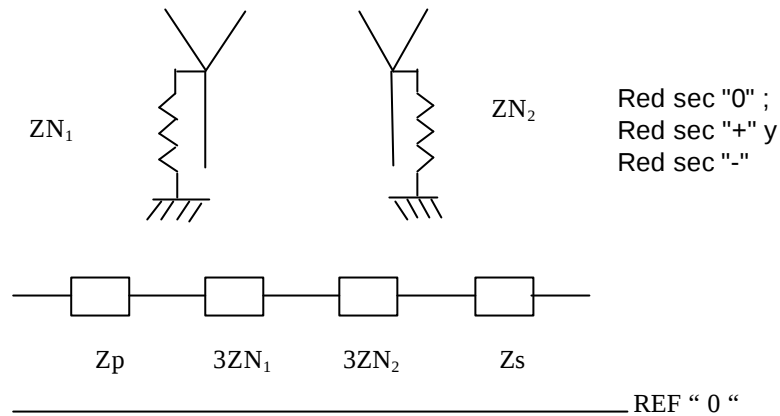
EQUIVALENTE THEVENIN 3 ϕ 

Descomponiendo este sistema en redes de secuencia por medio de las componentes simétricas.



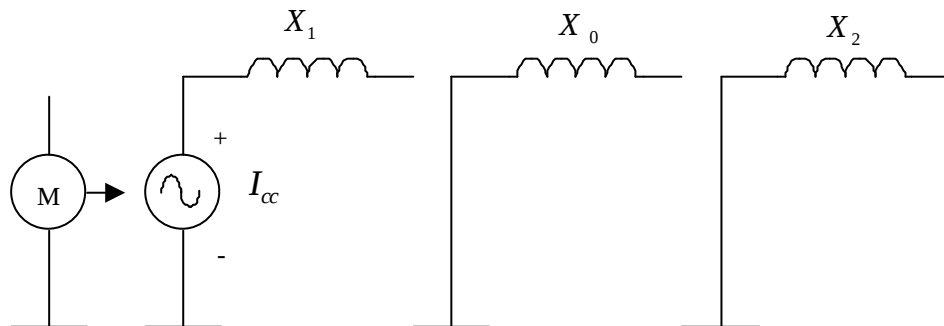
$MVA_{cc\ 1f}$	a
$MVA_{cc\ 3f}$	
$I_{cc\ 3f}$	b
$I_{cc\ 1f}$	
X_0, X_1, X_2	c
V_L	

2. Transformador



3. Cargas

- Normalmente se desprecian las de tipo pasivo ó motor pequeño.
- Las de grandes motores no son despreciables.



METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS DE CORTO CIRCUITO

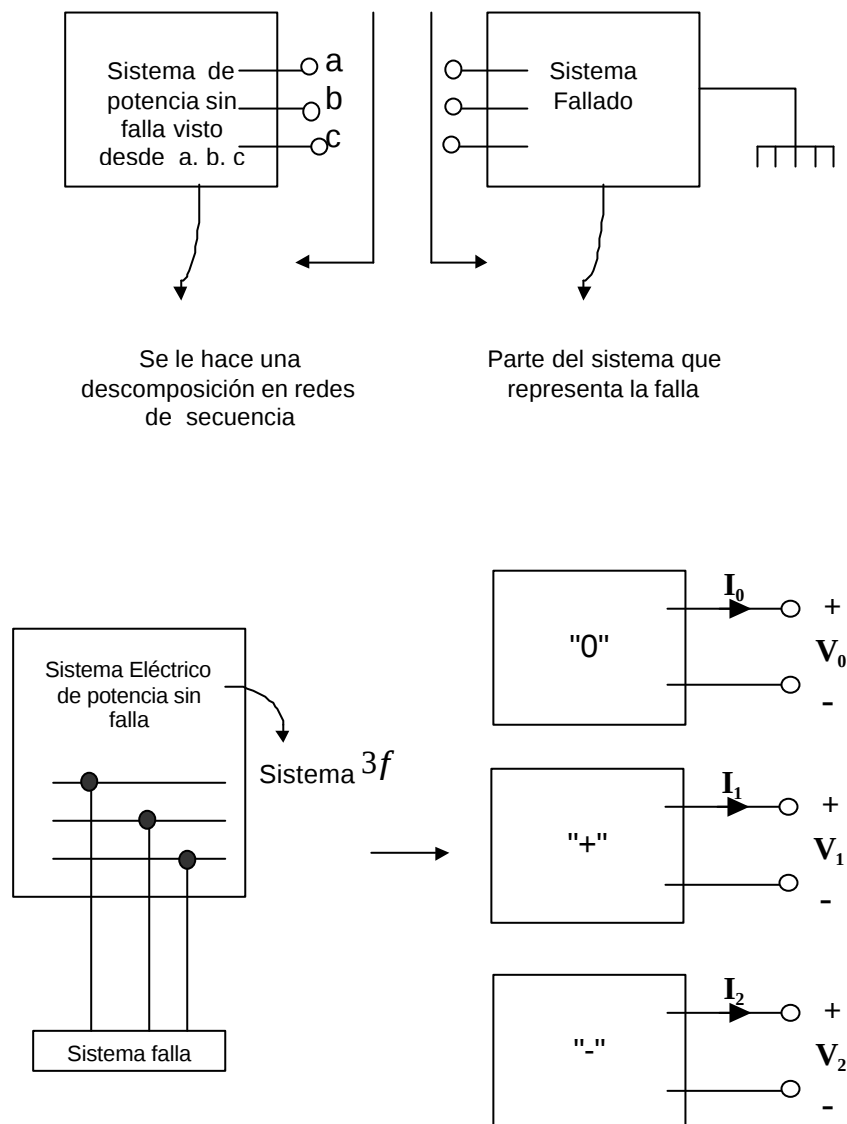
1. Metodología mediante redes de secuencia resolviendo las redes de secuencia en forma manual.
2. Mediante la matriz Z_{Barra} Z_0, Z_1, Z_2

Recordar que los elementos de la diagonal principal en la matriz Z_{Barra} son lo equivalentes thevenin vistos desde los puntos.

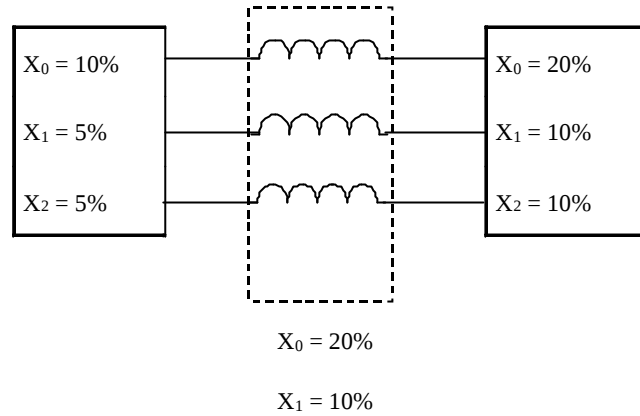
3. Mediante paquetes especializados como el ATP, el DigSILENT y otros, que manejan sistemas nfásicos.

Metodologías de Redes de Secuencia

Gráficamente sería :



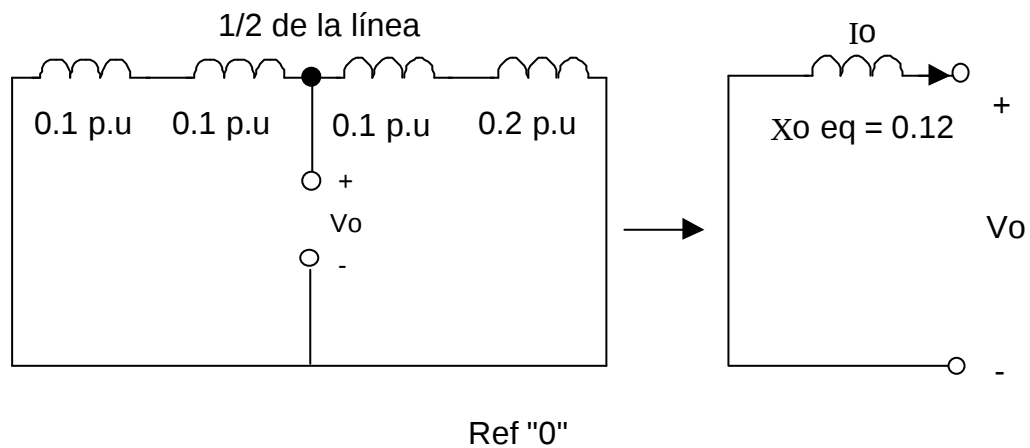
Ejemplo



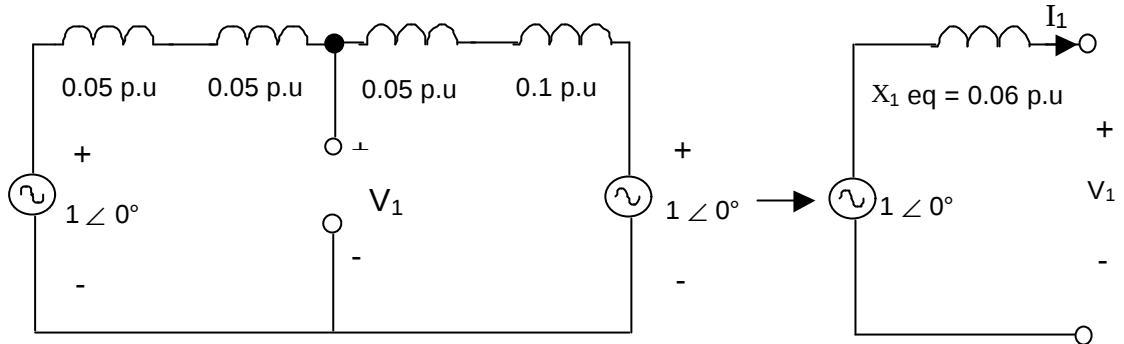
Se quiere representar el sistema en redes de secuencia para hacer el análisis de fallas en la mitad de la línea.

Sistema visto desde la mitad de la línea

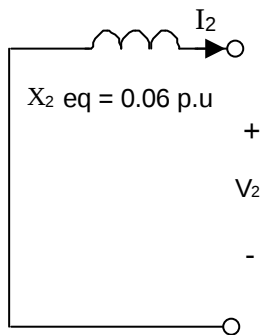
Red Sec "0":



Red Sec "+":

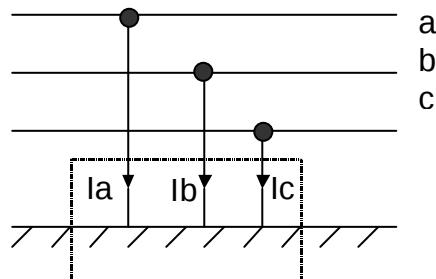


Red Sec "-":



TIPOS DE FALLAS

1. Falla 3 ϕ a tierra



$$V_a = V_b = V_c = 0$$

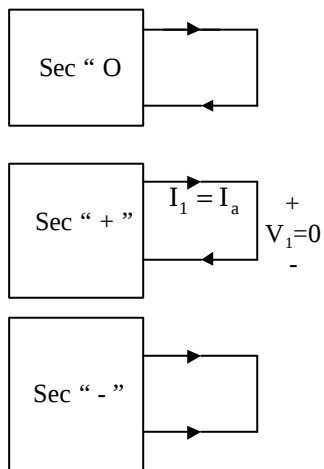
$$I_a + I_b + I_c = 0$$

I_a, I_b, I_c no se conocen

$$V_{012} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a=0 \\ V_b=0 \\ V_c=0 \end{bmatrix} \quad V_0 = 0; V_1 = 0; V_2 = 0$$

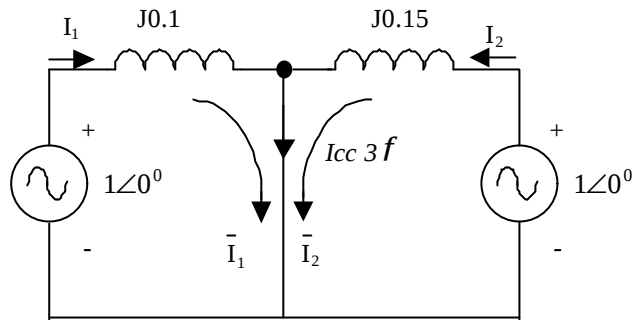
$$I_{012} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ a^2 I_a \\ a I_a \end{bmatrix} \rightarrow I_0 = 0; I_1 = I_a; I_2 = 0$$

Gráficamente:



Para el ejemplo:

Icc 3f en el punto de falla



$$J0.1 \times \bar{I}_1 = 1\angle 0^\circ \Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{1\angle 0^\circ}{J0.1}$$

$$J0.15 \times \bar{I}_2 = 1\angle 0^\circ \Rightarrow \bar{I}_2 = \frac{1\angle 0^\circ}{J0.15}$$

$$\bar{I}_1 = -J10$$

$$\bar{I}_2 = J6.667$$

$$I_{cc} 3\phi = -J16.667$$

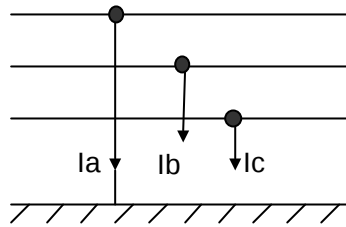
$$I_{abc} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -J16.667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_a = -J16.667$$

$$I_b = -J16.667 a^2$$

$$I_c = -J16.667 a$$

2. Falla Monofásica (LT)



$I_a = I_{cc} \text{ 1}\phi \text{ (punto de falla)}$

$I_a; I_b = 0; I_c = 0$

$V_a = 0; V_b; V_c$

$$I_{012} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow I_0 = I_1 = I_2$$

$$V_{012} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}$$

$$V_0 = \frac{1}{3}(V_b + V_c)$$

$$V_1 = \frac{1}{3}(aV_b + a^2V_c)$$

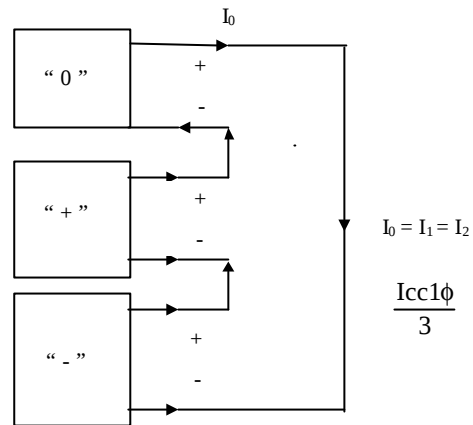
$$V_2 = \frac{1}{3}(a^2V_b + aV_c)$$

$$V_0 + V_1 + V_2 = \frac{1}{3}(V_b + aV_b + a^2V_b) + \frac{1}{3}(V_c + a^2V_c + aV_c)$$

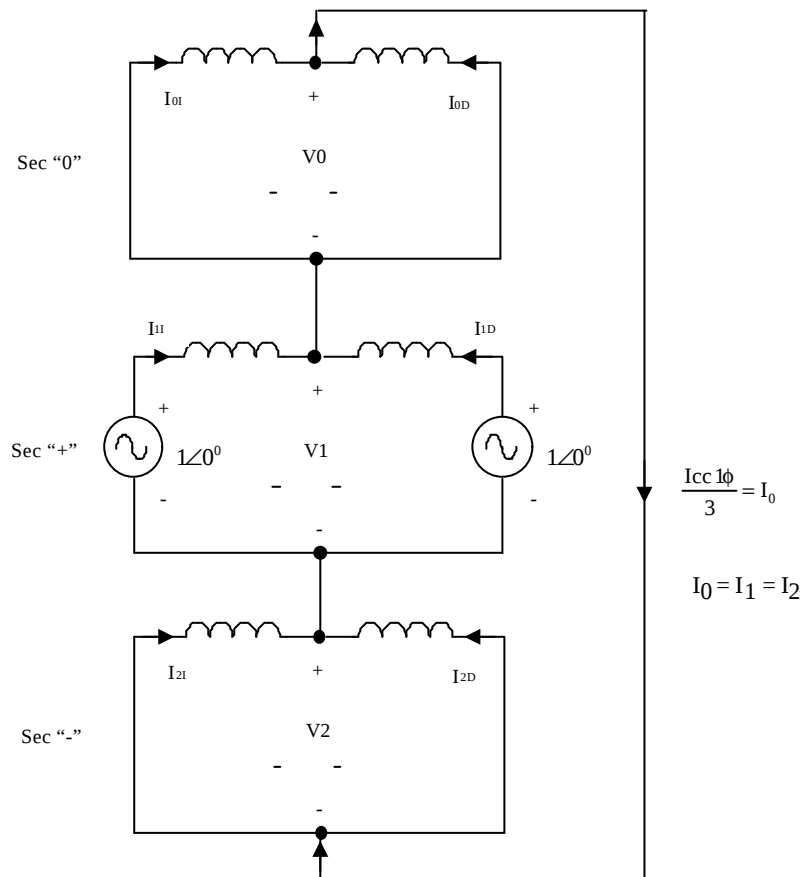
$$V_0 + V_1 + V_2 = \frac{1}{3}V_b(1 + a + a^2) + \frac{1}{3}V_c(1 + a^2 + a)$$

$$V_0 + V_1 + V_2 = 0$$

Para simular una falla 1ϕ , se debe conectar los circuitos de redes de secuencia en serie.



Ejemplo: Resolver para falla 1ϕ



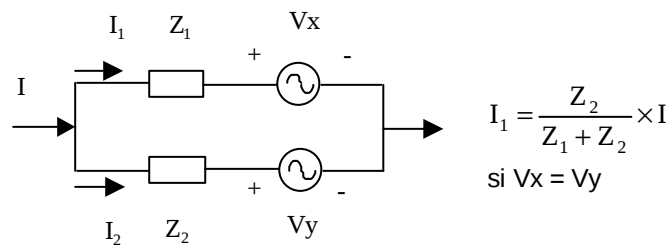
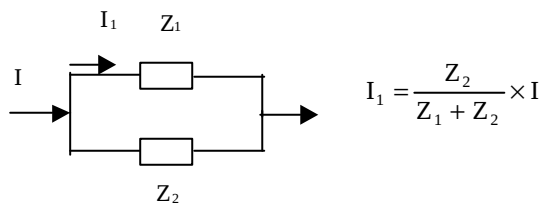
En el punto de falla:

$$I_{abc} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

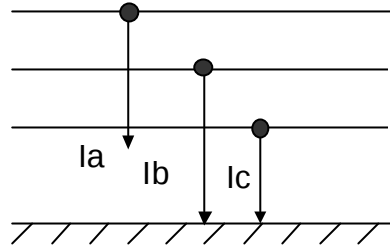
$$I_a = 3I_0 ; I_b = 0 ; I_c = 0$$

$$I_{abc} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{01} \\ I_{11} \\ I_{21} \end{bmatrix}$$

Divisor de corriente:



3. Falla Doble línea a tierra



$$I_a = 0 ; I_b ; I_c$$

$$V_a ; V_b = 0 ; V_c = 0$$

$$I_{012} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$I_0 = \frac{1}{3}(I_b + I_c)$$

$$I_1 = \frac{1}{3}(aI_b + a^2I_c)$$

$$I_2 = \frac{1}{3}(a^2I_b + aI_c)$$

$$I_0 + I_1 + I_2 = \frac{1}{3}(I_b + aI_b + a^2I_b) + \frac{1}{3}(I_c + a^2I_c + aI_c)$$

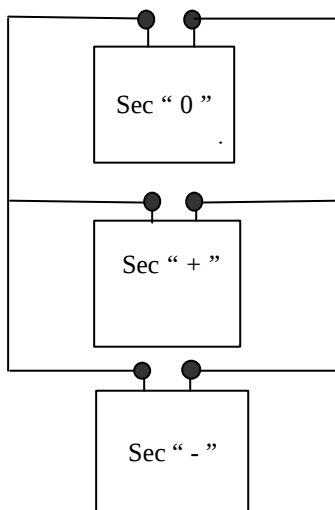
$$I_0 + I_1 + I_2 = \frac{1}{3}I_b(1 + a + a^2) + \frac{1}{3}I_c(1 + a^2 + a)$$

$$I_0 + I_1 + I_2 = 0$$

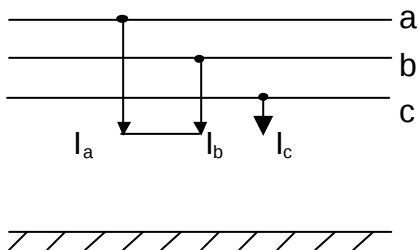
$$V_{012} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_o = V_1 = V_2 = \frac{1}{3} V_a$$

La conexión de los circuitos en redes de secuencia, para simular una falla doble línea a tierra es :



4. Falla de Línea - Línea



$$I_c = 0 ; I_a = I_b$$

$$V_c ; V_a = V_b$$

$$I_{012} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ -I_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_0 = \frac{1}{3}(I_a - I_a) = 0$$

$$I_1 = \frac{1}{3}(I_a - aI_a)$$

$$I_2 = \frac{1}{3}(I_a - a^2I_a)$$

$$I_0 + I_1 + I_2 = \frac{1}{3} \left(2I_a - \overbrace{aI_a - a^2I_a}^0 - I_a + I_a \right)$$

$$I_0 + I_1 + I_2 = I_a$$

$$V_{012} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_a \\ V_c \end{bmatrix}$$

$$V_0 = \frac{1}{3}(V_a + V_a + V_c)$$

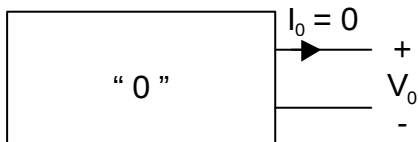
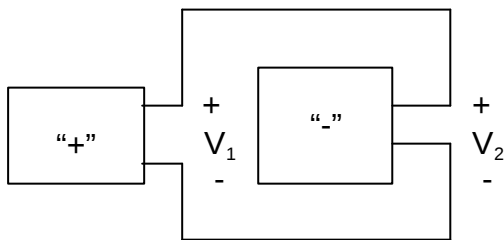
$$V_1 = \frac{1}{3}(V_a + aV_a + a^2V_c)$$

$$V_2 = \frac{1}{3}(V_a + a^2V_a + aV_c)$$

$$V_0 + V_1 + V_2 = \frac{3}{3}V_a$$

$$V_0 + V_1 + V_2 = V_a$$

La conexión de los circuitos en redes de secuencia es:

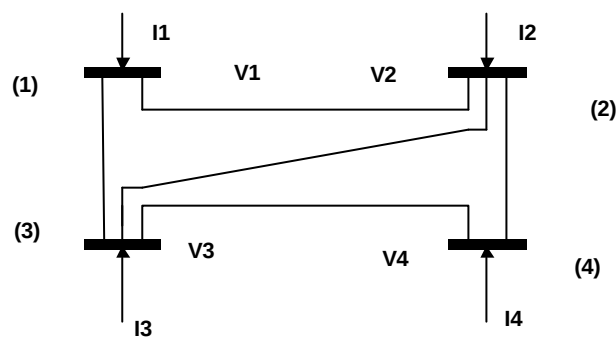


4. ECUACIONES DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA

Métodos de solución de circuitos:

1. Método de voltajes nodales
2. Método de corrientes de malla (poco uso)

Ventajas del método de voltaje de nodo

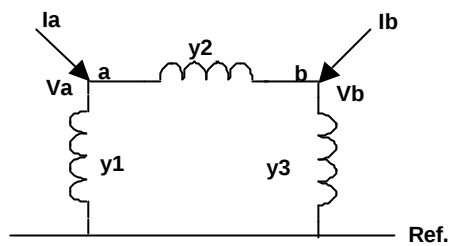


El método de voltajes nodales coincide con las variables de interés en la red.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

$I_N = [Y_N] V_N$ ECUACIÓN BÁSICA EN EL MÉTODO DE VOLTAJES DE NODO.

CONSTRUCCIÓN DE LA Y_N EN FORMA SISTEMÁTICA



V_a, V_b son voltajes nodales.

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 & -y_2 \\ -y_2 & y_2 + y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix}$$

ADMITANCIA	NODOS DE CONEXIÓN	
	NODO INICIAL	NODO FINAL
Y_1	a	-a
Y_2	a	b
Y_3	b	-b

Si sólo existiera y_1 la matrix Y quedaría de la siguiente manera:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si sólo existiera y_2 la matrix Y quedaría de la siguiente manera:

$$Y = \begin{bmatrix} y_2 & -y_2 \\ -y_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

Si sólo existiera y_3 la matrix Y quedaría de la siguiente manera:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$Y = \sum y$$

Algoritmo:

Se lee y , N_i , N_F

Donde y es el elemento entre el nodo inicial y el nodo final.

$$Y(N_i, N_i) \leftarrow Y(N_i, N_i) + y$$

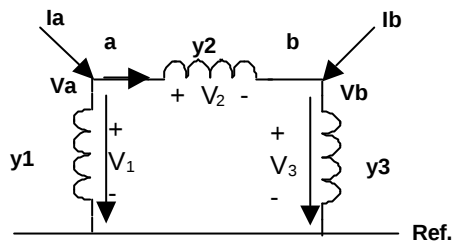
$$Y(N_F, N_F) \leftarrow Y(N_F, N_F) + y$$

$$Y(N_i, N_F) \leftarrow Y(N_i, N_F) - y$$

$$Y(N_F, N_i) \leftarrow Y(N_F, N_i)$$

MATRIZ DE CONECTIVIDAD

Construcción de la matriz Y_n mediante la matriz de conectividad.



$$I_a = I_1 + I_2$$

$$I_b = I_3 - I_2$$

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$I_N = C I_p$$

$$V_1 = V_a$$

$$V_2 = V_a - V_b$$

$$V_3 = V_b$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix}$$

$$V_p = C^T V_N$$

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = Y_n \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix}$$

$$I_N = Y_N V_N$$

$$I_1 = y_1 V_1$$

$$I_2 = y_2 V_2$$

$$I_3 = y_3 V_3$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline y_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & y_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & y_3 \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$I_p = Y_p V_p$$

$$I_N = C I_p \Rightarrow I_N = C Y_p V_p$$

$$I_N = C Y_p C^T V_N$$

$$\text{De donde: } Y_N = C Y_p C^T$$

MATRIZ Z_{BARRA}

Se le llama también Matriz Znodal o Matriz Z_N .

La ecuación fundamental que rige un sistema de potencia en estado estacionario es:

$$V_N = Z_N I_N (1)$$

Paralelamente, se puede trabajar con la ecuación alterna $I_N = Y_N V_N$

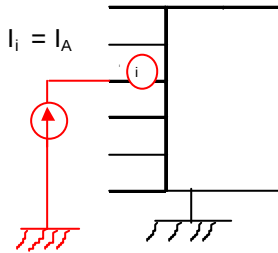
Z_N se puede evaluar inicialmente como:

$$Z_N = Y_N^{-1} \Rightarrow \text{Pero esto no siempre es posible}$$

Mirando (1), cuál sería el significado de un elemento Z_{ii} ?

$$V_i = Z_{i1} I_1 + Z_{i2} I_2 + \dots + Z_{ii} I_i + \dots + Z_{iN} I_N$$

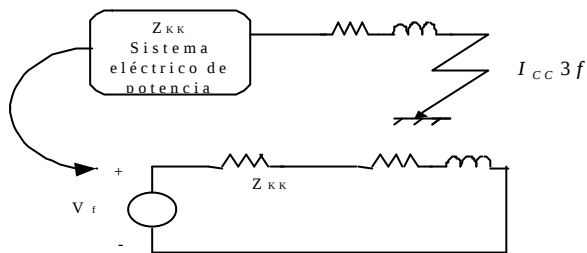
$$Z_{ii} = \left. \frac{V_i}{I_i} \right|_{\substack{\text{Corrientes} \neq I_i \\ I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_N = 0 \\ I_i \neq 0}}$$



CARACTERÍSTICAS DE LA MATRIZ Z_{NODAL}

- 1) Los elementos de la diagonal principal representan la impedancia de theverin vista desde esos nodos.
- 2) Los elementos que están por fuera de la diagonal principal representan el grado de acople de los nodos. Los diferentes Z_{ij} representan los acoples de

impedancia (Las impedancias de transferencia, muy importantes en el análisis de corto circuito).



Unos MVA muy altos quieren decir que Z_{kk} es de valor pequeño.

MÉTODOS PARA CONSTRUIR LA MATRIZ Z

1. Método Circuitual: Método de inyección de corrientes.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_K \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1K} \\ Z_{2K} \\ \vdots \\ Z_{KK} \\ \vdots \\ Z_{NK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_K \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}$$

Cómo se podría construir la columna específica de Z_{KK} ?

Inicialmente se considera I_k por facilidad como 1 amperio ($I_k = 1A$) e $I_i = 0 A$ entonces:

$$V_1 = Z_{1K}$$

$$V_2 = Z_{2K}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

 $\Rightarrow$

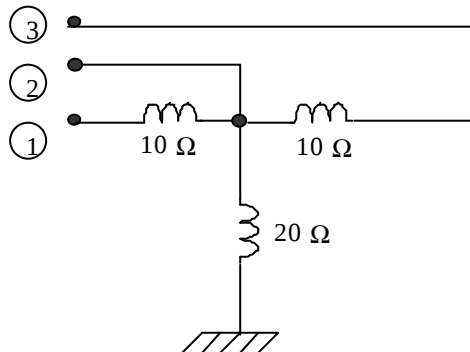
Se Inyectan corrientes y se leen voltajes

$$V_K = Z_{KK}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$V_N = Z_{NK}$$

Ejemplo



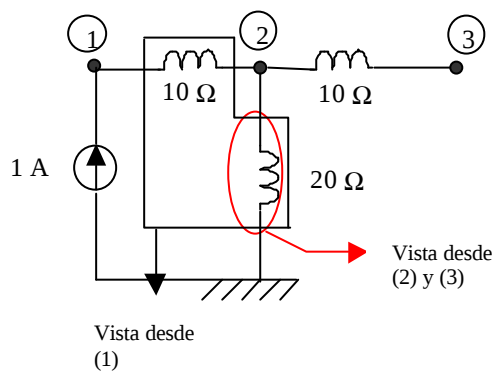
Hallar $Z_n = X_n$

Solución:

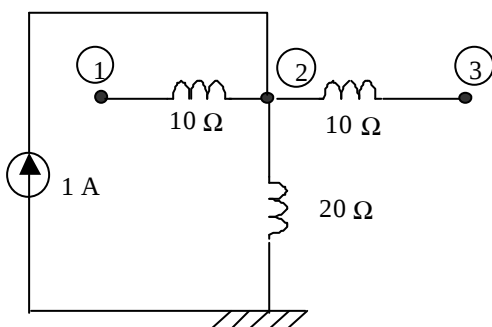
$$C_n = J$$

$30 \, \Omega$	$20 \, \Omega$	$20 \, \Omega$
$20 \, \Omega$	$20 \, \Omega$	$20 \, \Omega$
$20 \, \Omega$	$20 \, \Omega$	$30 \, \Omega$

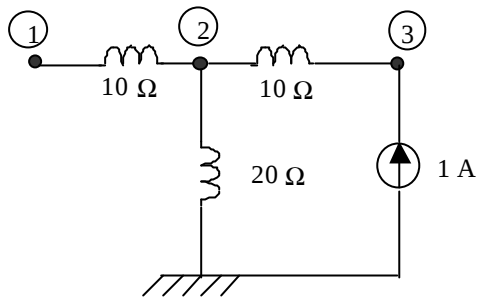
Para construir la columna específica de Z_{11} se inyecta por el nodo (1) una corriente $I_1 = 1 \text{ Amp}$. Las demás corrientes serán cero.



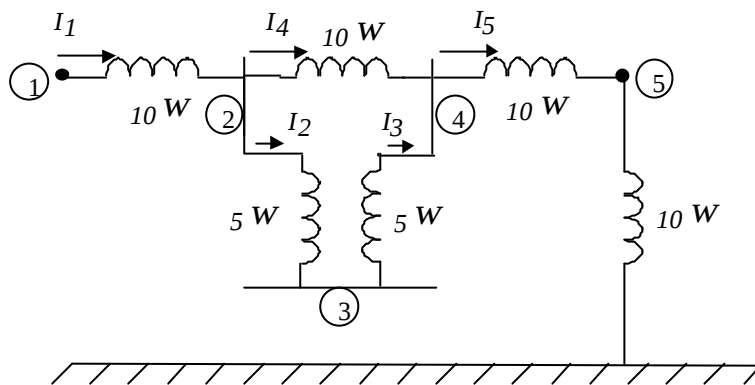
Para construir la columna de Z_{22} se inyecta por el nodo 2 una corriente $I_2 = 1 \text{ A}$, $I_1 = I_3 = 0 \text{ Amp}$.



Para construir la columna de Z_{33} se inyecta por el nodo 3 una corriente $I_3 = 1 \text{ Amp}$, $I_1 = I_2 = 0 \text{ Amp}$.

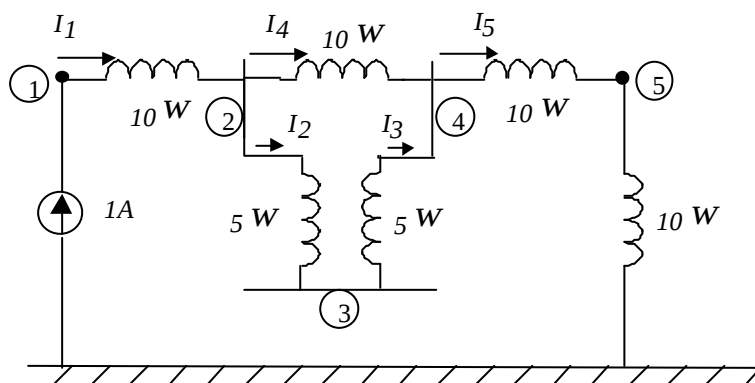


Ejemplo



Hallar la matriz Z nodal

Para Construir la columna de Z_{11} se inyecta por el nodo 1 una corriente $I_1 = 1$ Amp.



J	35	25	22.5	20	10
	25	25	22.5	20	10
	22.5	22.5	23.75	20	10
	20	20	20	20	10
	10	10	10	10	10

$I_1 + I_2 = 1$
 $I_1 + I_3 = I_4$
 $I_1 + I_2 = I_4 = 1$

$$X_{11} = 10\Omega + 5\Omega + 10\Omega + 10\Omega = 35\Omega$$

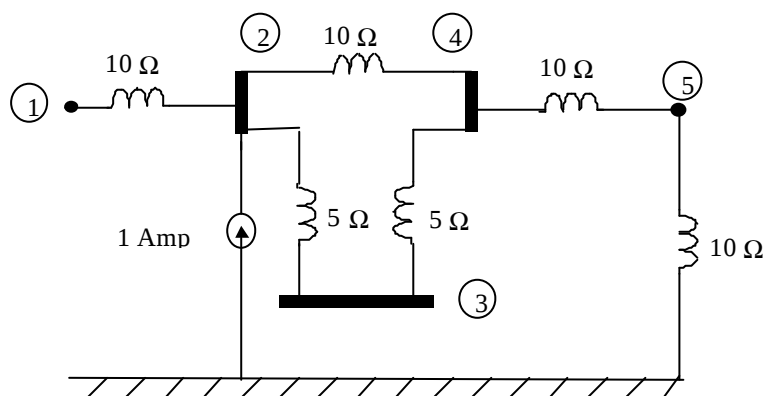
$$X_{12} = 25\Omega$$

$$X_{13} = 22.5\Omega$$

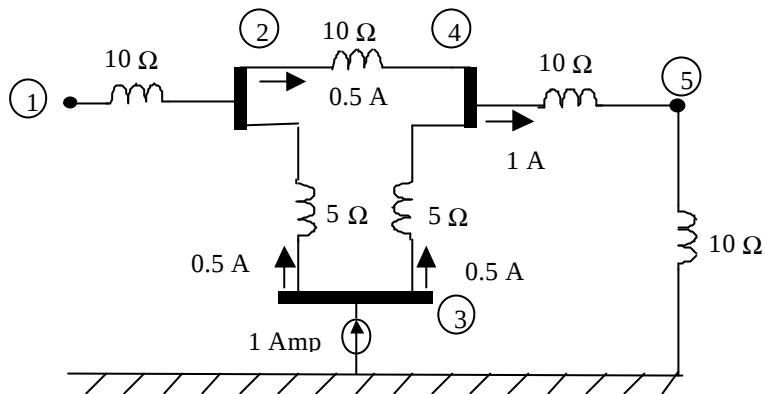
$$X_{14} = 20\Omega$$

$$X_{15} = 10\Omega$$

Para construir la columna de Z_{22} se inyecta por el nodo 2 una corriente $I = 1$ Amp.

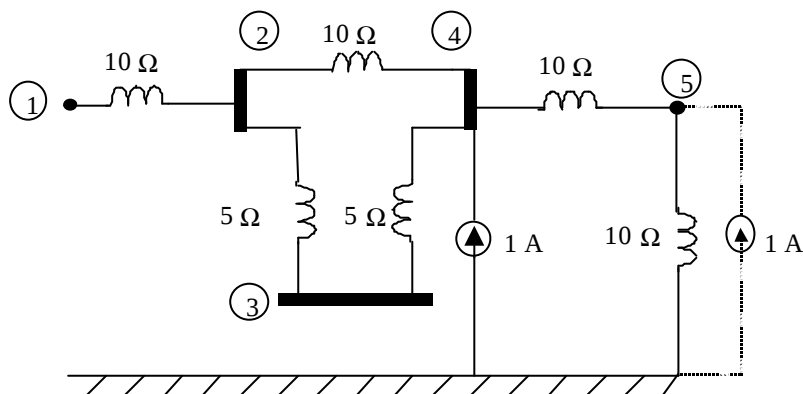


Para construir la columna de Z_{33} se inyecta por el nodo 3 una corriente $I = 1$ Amp.



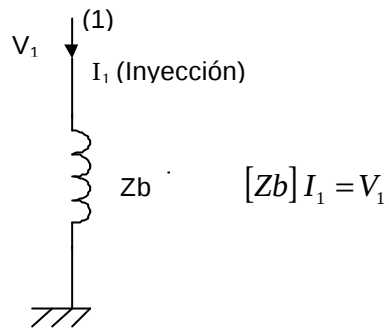
$$X_{33} = 20 \, \Omega + 3.75 \, \Omega = 23.75 \, \Omega$$

Para construir la columna de Z_{44} se inyecta por el nodo 4 una corriente $I = 1$ Amp.



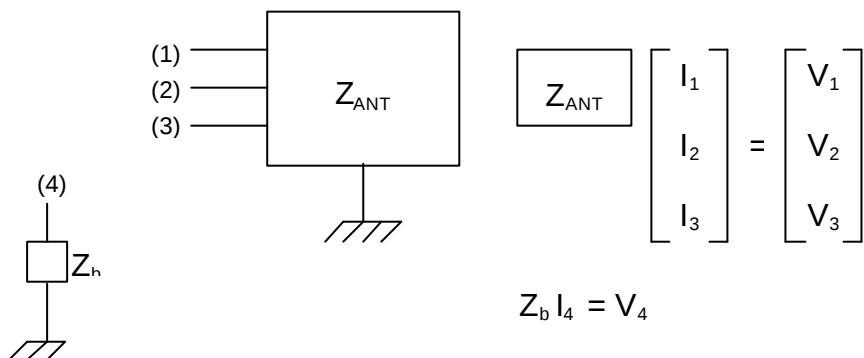
2. Método paso a paso o adición de elementos:

Se trata de introducir todos los elementos que estén conectados a la red.



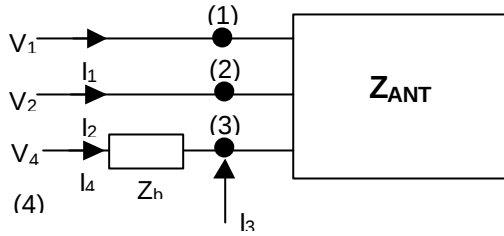
a). Se debe empezar por elementos que estén conectados a la referencia.

b). Otros elementos que estén conectados a referencia.



$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & 0 \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & 0 \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_b \end{bmatrix} = Z_N$$

c). Adición de un elemento entre un nodo existente y uno nuevo.



Sacando las ecuaciones correspondientes:

$$\begin{bmatrix} Z_{ANT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 + I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$V_4 = V_3 + Z_b I_4$$

$$(1) \quad Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{13} I_3 + Z_{13} I_4 = V_1$$

$$(2) \quad Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + Z_{23} I_3 + Z_{23} I_4 = V_2$$

$$(3) \quad Z_{31} I_1 + Z_{32} I_2 + Z_{33} I_3 + Z_{33} I_4 = V_3$$

$$(4) \quad Z_{31} I_1 + Z_{32} I_2 + Z_{33} I_3 + (Z_{33} + Z_b) I_4 = V_4$$

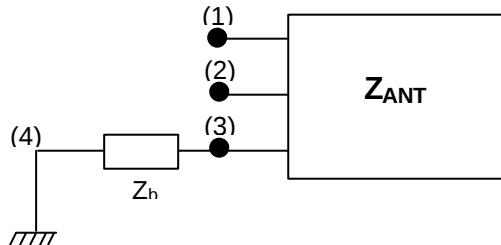
Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	Z_{13}
Z_{21}	Z_{22}	Z_{23}	Z_{23}
Z_{31}	Z_{32}	Z_{33}	Z_{33}
Z_{31}	Z_{32}	Z_{33}	$Z_{33} + Z_b$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

Z NUEVA

Del elemento donde se conecta se copia la fila y la columna y al elemento de la diagonal principal se le agrega la Z adicionada.

d). Adición de un nuevo elemento entre un nodo existente y la referencia (Es un caso particular del anterior).



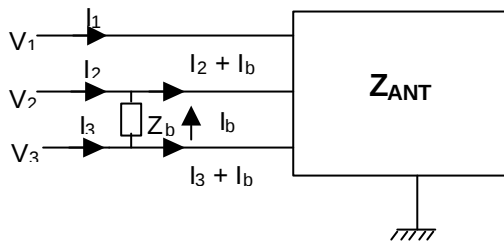
		Z_{13}
Z_{ANT}		Z_{23}
		Z_{33}
Z_{31}	Z_{32}	$Z_{33} + Z_b$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformación de Kron

$$Z_{NUEVA} = [Z_{ANT}] - \frac{1}{Z_{33} + Z_b} \begin{bmatrix} Z_{13} \\ Z_{23} \\ Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}$$

e) Adición de un elemento entre dos nodos existentes.



$$[Z_{ANT}] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 + I_b \\ I_3 - I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$V_3 = I_b Z_b + V_2$$

$$V_2 - V_3 + I_b Z_b = 0$$

$$Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{13} I_3 + (Z_{12} - Z_{13}) I_b = V_1$$

$$Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + Z_{23} I_3 + (Z_{22} - Z_{23}) I_b = V_2$$

$$Z_{31} I_1 + Z_{32} I_2 + Z_{33} I_3 + (Z_{32} - Z_{33}) I_b = V_3$$

$$0 = (Z_{21} - Z_{31}) I_1 + (Z_{22} - Z_{32}) I_2 + (Z_{23} - Z_{33}) I_3 + (Z_{22} + Z_{33} + Z_b - Z_{23} - Z_{32}) I_b$$

(1) Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & (Z_{12} - Z_{13}) \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & (Z_{22} - Z_{23}) \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & (Z_{32} - Z_{33}) \\ (Z_{21} - Z_{31}) & (Z_{22} - Z_{32}) & (Z_{23} - Z_{33}) & (Z_{22} - Z_{33} + Z_b - Z_{23} - Z_{32}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformación de Kron

$$\begin{bmatrix} Z_{ANT} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_D \end{bmatrix} \quad Z_{NUEVA} = Z_{ANT} - \frac{I}{Z_D} [Z_{12} \parallel Z_{21}]$$

• 5. ANÁLISIS DE FLUJO DE CARGA

Definición:

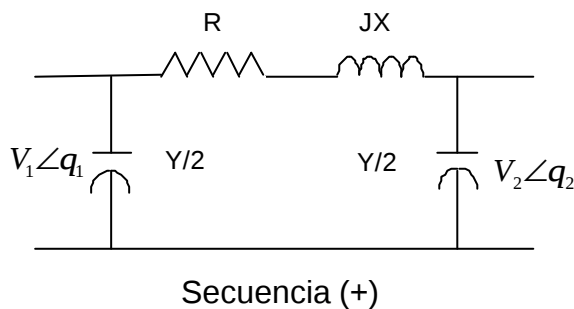
- Es la determinación de los flujos de potencia activa y reactiva P y Q , de todos los elementos del sistema. Además de todos los voltajes en las barras. Particularmente, interesa los flujos que pasan a través de las líneas y transformadores.
- Es la determinación del punto de operación del sistema de potencia (P , Q , V , θ).

El problema de flujo de carga es un problema de estado estacionario (60 Hz). Se utilizarán fasores.

Modelación de cada uno de los elementos del sistema

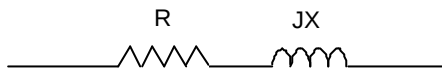
1. Para una línea de transmisión:

En forma general el modelo a utilizar es el modelo π



Es válido para todos los niveles de tensión $V_N \geq 115\text{KV}$

El modelo π es válido para niveles de tensión mayores de 13,8 kV y menores de 115 kV. Para bajas tensiones :

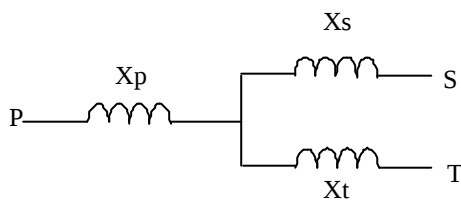


A nivel de distribución ($V_N \leq 13,2$ kV)

- A nivel de 230 kV : $X \gg R$ (de 8 a 10 veces)
- A niveles de 44 kV : $X \cong R$ (comparables).
- $R > X$ (nivel de 13,2 kV)

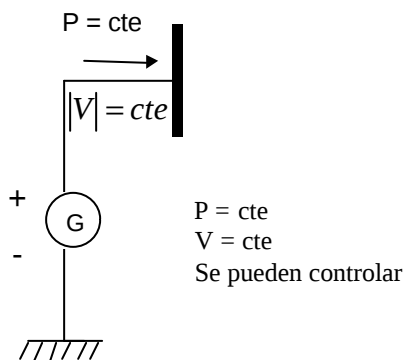
A nivel de sistemas de potencia se manejan niveles de : 69 kV, 115 kV, 230 kV, dónde $X > R$.

2. Para un transformador :

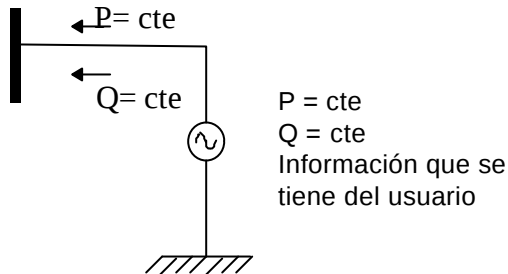


3. Generador:

Mirado desde el barraje



4. Carga:



TIPOS DE BARRAS A CONSIDERAR

1. Barra de referencia (slack, flotante)

Es la Referencia, $V \angle 0^\circ$ (conocido)

Generalmente la barra de referencia es un punto de generación, es el nodo más fuerte del sistema. No se definen dos puntos de referencia, ya que es imposible hacer que los ángulos de dichas barras sean iguales. A esta barra se le denomina barra tipo $V\theta$, voltaje conocido, ángulo conocido.

2. Barra de carga:

Es una barra donde se conocen la potencia activa y reactiva. A esta barra se le conoce como barra tipo PQ.

3. Barra de generación:

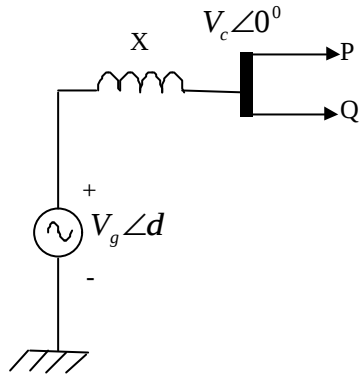
Es una barra donde se conoce o define la P y $|V|$, se conoce como barra tipo PV.

4. Barras temporales

Son las mismas barras que se definieron anteriormente, pero con restricciones.

- Barra de carga con restricciones de voltaje. En este tipo de barra se fija el voltaje. Entra dentro del tipo de barra de generación.
- Una barra de generación con restricciones de reactivos. Se fija la cantidad de reactivos. Entra dentro del tipo de barra de carga.

Introducción al flujo de carga:



$$P + jQ = S = V_c \angle 0^\circ \left[\frac{V_g \angle \delta - V_c \angle 0^\circ}{X \angle 90^\circ} \right]^*$$

$$P + jQ = S = \frac{V_g V_c}{X} \angle (90^\circ - \delta) - \frac{V_c^2}{X} \angle 90^\circ$$

$$P = \frac{V_g V_c}{X} \cos(90^\circ - \delta) = \frac{V_g V_c}{X} \text{Sen} \delta$$

$$P = \frac{V_g V_c}{X} \text{Sen} \delta$$

$$Q = \frac{V_g V_c}{X} \underbrace{\text{Sen}(90^\circ - \delta)}_{\cos \delta} - \frac{V_c^2}{X}$$

$$Q = \frac{V_c}{X} [V_g \cos \delta - V_c]$$

Para el intercambio de potencia P, circuitalmente lo único que podría variar es el ángulo δ .

La reactancia X se podría variar colocando condensadores en serie.

La potencia reactiva Q depende de la relación $(V_g - V_c)$, o sea de la diferencia de tensión. El efecto de la potencia reactiva sobre las líneas de transmisión es la de aumentar la corriente, por consiguiente la de aumentar las pérdidas; lo cual redundaría finalmente en una reducción de la capacidad de transporte de la línea.

Según su topología, los sistemas se pueden dividir en dos : sistemas enmallados y sistemas tipo radiales.

En el análisis de sistemas de potencia se analizarán los sistemas enmallados.

MÉTODOS PARA REALIZAR EL CÁLCULO DEL FLUJO DE CARGA

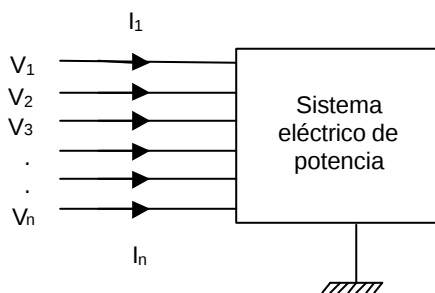
1. Método de Gauss - Seidel
2. Método de Newton - Raphson
3. Método de Newton - Raphson desacoplado.
4. Método de Newton - Raphson desacoplado Rápido
5. Método de flujo lineal "DC"

Existen algunos elementos comunes sobre los cuales se apoyan estos métodos:

- Son Metodologías numéricas para sistemas enmallados (no radiales).
- Son Metodologías que se apoyan en la matriz (Ynodal).
- Son Metodologías que se apoyan en la matriz Znodal (Z_N)

En el presente documento se aplicarán las metodologías que se apoyan en la matriz Ynodal.

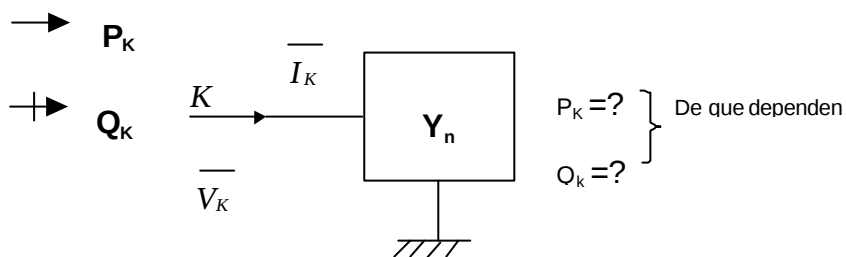
Matriz Ynodal



Considera las barras físicas del sistema

$$[Y_N] \begin{bmatrix} V_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix} \quad \text{ECUACIÓN BÁSICA}$$

Miremos al sistema desde un punto



$$\boxed{P_K + jQ_K = S_K}$$

$$S_K = P_K - jQ_K \quad \text{También se puede definir así.}$$

$$\overline{S_K} = \overline{V_K} \times \overline{I_K}^*$$

$$\overline{I_K} = \sum_{i=1}^N Y_{Ki} V_i$$

$$S_K = \overline{V_K} \times \sum_{i=1}^N (Y_{Ki})^* (V_i)^*$$

$$\overline{V_i} = V_i \angle q_i = V_i e^{jq_i}$$

$$\overline{Y_{Ki}} = G_{ki} + jB_{ki}$$

Reemplazando en S_K

$$S_K = V_K e^{jq_K} \sum_{i=1}^N (G_{ki} - jB_{ki}) V_i e^{-jq_i}$$

$$S_K = \sum_{i=1}^N V_K V_i e^{j(q_K - q_i)} (G_{ki} - jB_{ki})$$

Por definición

$$q_{Ki} \triangleq q_K - q_i$$

$$S_K = \sum_{i=1}^N V_K V_i (\cos q_{ki} + j \sin q_{ki}) (G_{ki} - jB_{ki})$$

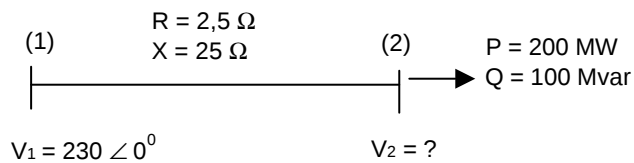
$$P_K = \sum_{i=1}^N V_K V_i (\cos q_{ki} G_{ki} + \sin q_{ki} B_{ki})$$

$$Q_K = \sum_{i=1}^N V_K V_i (\sin q_{ki} G_{ki} - \cos q_{ki} B_{ki})$$

Estas ecuaciones indican que el sistema no es lineal, por lo cual se deben emplear metodologías no lineales para darle una solución al sistema.

Ejemplo :

Resolver el sistema :



$$S_{\text{base}} = 100 \text{ MVA}$$

$$V_{\text{base}} = 230 \text{ kV}$$

$$R_{\text{p.u}} = 4,7258 \times 10^{-3}$$

$$X_{\text{p.u}} = 4,7258 \times 10^{-2}$$

$$Z_{\text{p.u}} = 4,7258 \times 10^{-3} + j 4,7258 \times 10^{-2}$$

$$Z_{\text{p.u}} = 0,04749 \angle 84,29^\circ$$

$$Y \cong 1/Z = 21,055 \angle -84,29^\circ$$

Barra de ref $\Rightarrow$ (1)

Barra de carga $\Rightarrow$ (2)

Plantear las ecuaciones para P_2 y Q_2

Solución:

$$P_2 = -2 \text{ p.u}$$

$$Q_2 = -1 \text{ p.u}$$

$$P_2 = f(V_2, \theta_2)$$

$$Q_2 = f(V_2, \theta_2)$$

a) Construir matriz Y_{NODAL}

$$Y_{\text{NODAL}} = \begin{bmatrix} 2,095 - j20,95 & -2,095 + j20,95 \\ -2,095 + j20,95 & 2,095 - j20,95 \end{bmatrix}$$

$$Y_n = G_{ki} + jB_{ki}$$

$$G_{ki} = \begin{bmatrix} 2,095 & -2,095 \\ -2,095 & 2,095 \end{bmatrix}$$

$$B_{ki} = \begin{bmatrix} -20,95 & 20,95 \\ 20,95 & -20,95 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \sum_{K=1}^N V_2 V_i (G_{2i} \cos(q_2 - q_i) + B_{2i} \sin(q_2 - q_i))$$

$$P_2 = V_2 V_1 [G_{21} \cos(q_2 - q_1) + B_{21} \sin(q_2 - q_1)] + V_2^2 (G_{22})$$

$$P_2 = V_2 V_1 [-2,095 \cos(q_2 - q_1) + 20,95 \sin(q_2 - q_1)] + V_2^2 (2,095)$$

$$Q_2 = \sum_{K=1}^N V_2 V_i (G_{2i} \sin(q_2 - q_i) - B_{2i} \cos(q_2 - q_i))$$

$$Q_2 = V_2 V_1 [G_{21} \sin(q_2 - q_1) - B_{21} \cos(q_2 - q_1)] + V_2^2 (-B_{22})$$

$$Q_2 = V_2 V_1 [-2.095 \sin(q_2 - q_1) - 20.95 \cos(q_2 - q_1)] + V_2^2 (20.95)$$

Para las incógnitas son V_2 y θ_2

Las expresiones genéricas para P_2 y Q_2 son :

$$P_2 = V_2 V_1 (G_{21} \cos q_2 + B_{21} \sin q_2) + V_2^2 G_{22}$$

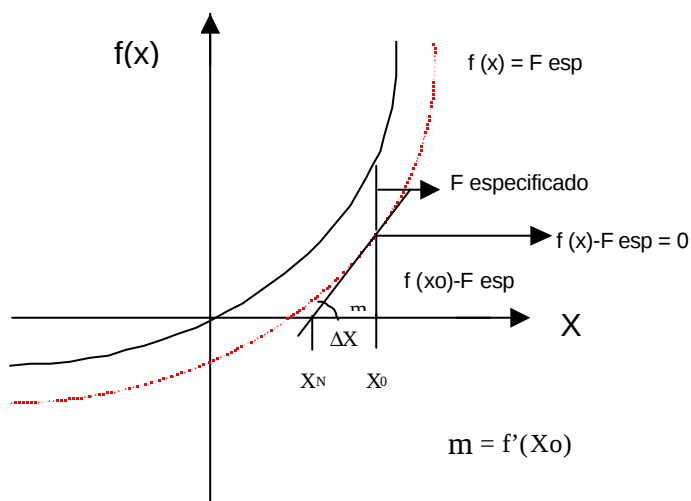
$$Q_2 = V_2 V_1 (G_{21} \sin q_2 - B_{21} \cos q_2) - V_2^2 B_{22}$$

$$P_2 = f_1(q_2, V_2)$$

$$Q_2 = f_2(q_2, V_2)$$

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

1. MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON (para sistemas enmallados)



El algoritmo de Newton – Raphson parte de una semilla para $f(x)$.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - F_{\text{esp}}}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) \Delta x = f(x_0) - F_{\text{esp}}$$

$$\Delta x = [f'(x_0)]^{-1} [f(x_0) - F_{\text{esp}}]$$

$$x_N = x_0 - \Delta x$$

$$x_N = x_0 - [f'(x_0)]^{-1} [F_{esp} - F(x_0)]$$

x_N : mejorado

x_0 : supuesto

$[f'(x_0)]^{-1}$: Jacobiano invertido

F_{esp} : Valores conocidos de las funciones

$f(x_0)$: Valor calculado de $F(x)$.

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1$$

.

.

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_n$$

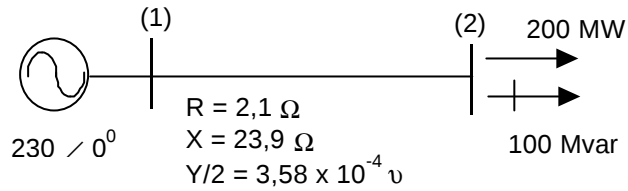
$$\begin{bmatrix} x_{1N} \\ x_{2N} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \partial f_n / \partial x_1 & \partial f_n / \partial x_2 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1 esp - f_1(x_{10}, x_{10}) \\ F_2 esp - f_2(x_{10}, x_{20}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n esp - f_n(x_{10}, x_{n0}) \end{bmatrix}$$

FÓRMULA GENERAL

Aplicado a nuestro caso:

$$\begin{bmatrix} q_{2N} \\ V_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{20} \\ V_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial P_2 / \partial q_2 & \partial P_2 / \partial V_2 \\ \partial Q_2 / \partial q_2 & \partial Q_2 / \partial V_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_2 esp - P_2 cal(q_{20}, V_{20}) \\ Q_2 esp - Q_2 cal(q_{20}, V_{20}) \end{bmatrix}$$

Ejemplo numérico

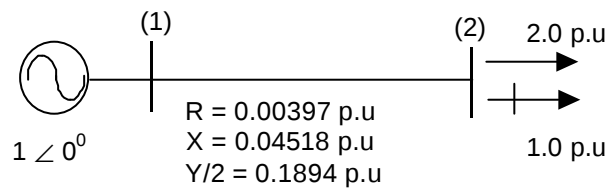
Calcular V_2 , θ_2 **Solución:**

1. Llevar el sistema a un sistema en p.u

$$V_B = 230 \, \text{kV}$$

$$S_B = 100 \, \text{MVA}$$

$$Z_B = \frac{230^2}{100} = 529 \, \Omega$$

2. Cálculo **G+JB**

Se hallará Y barra por el método de adición de elementos.

Nodo I	Nodo F	R	X	Y/2
1	2	0.00397	0.04518	0.1894

$$G(\text{nodo I, nodo I}) \quad \leftarrow \quad G(\text{nodo I, nodo I}) + \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$B(\text{nodo I, nodo I}) \quad \leftarrow \quad B(\text{nodo I, nodo I}) - \frac{X}{R^2 + X^2} + \frac{Y}{2}$$

$$G(\text{nodo F, nodo F}) \quad \leftarrow \quad G(\text{nodo F, nodo F}) + \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$B(\text{nodo F, nodo F}) \quad \leftarrow \quad B(\text{nodo F, nodo F}) - \frac{X}{R^2 + X^2} + \frac{Y}{2}$$

$$G(\text{nodo I, nodo F}) \quad \leftarrow \quad G(\text{nodo I, nodo F}) - \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$B(\text{nodo I, nodo F}) \quad \leftarrow \quad B(\text{nodo I, nodo F}) + \frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$G(\text{nodo F, nodo I}) \quad \leftarrow \quad G(\text{nodo I, nodo F})$$

$$B(\text{nodo F, nodo I}) \quad \leftarrow \quad B(\text{nodo I, nodo F})$$

Se repite para todos los elementos.

$$G = \begin{bmatrix} 1,93 & -1,93 \\ -1,93 & 1,93 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -21,77 & 21,96 \\ 21,96 & -21,77 \end{bmatrix}$$

3. Construcción del **JACOBIANO** e inversión del mismo

$$P_2 = f_1(q_2, V_2)$$

$$Q_2 = f_2(q_2, V_2)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial q_2} & \frac{\partial P_2}{\partial V_2} \frac{V_2}{V_2} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial V_2} \frac{V_2}{V_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_2 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial q_2} & V^2 \times \frac{\partial P_2}{\partial V_2} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & V^2 \times \frac{\partial Q_2}{\partial V_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_2 \\ \frac{\Delta V_2}{V_2} \end{bmatrix}$$

En la literatura se encuentra :

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{22} & N_{22} \\ M_{22} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_2 \\ \frac{\Delta V_2}{V_2} \end{bmatrix}$$

$$H_{22} = V_2 V_1 [-G_{21} \sin q_2 + B_{21} \cos q_2]$$

$$N_{22} = V_2 V_1 [G_{21} \cos q_2 + B_{21} \sin q_2] + 2 V_2^2 \times G_{22}$$

$$M_{22} = -V_2 V_1 [G_{21} \cos q_2 + B_{21} \sin q_2]$$

$$L_{22} = V_2 V_1 [G_{21} \sin q_2 - B_{21} \cos q_2] - 2 V_2^2 \times B_{22}$$

Haciendo los cálculos:

V_1 es conocido

V_2 y θ_2 hay que suponerlos

SEMILLA : $V_2 = 1$

$$\theta_2 = 0^\circ$$

$$JAC = \begin{bmatrix} 21,96 & 1,93 \\ -1,93 & 21,58 \end{bmatrix} \quad \text{Para la primera iteración}$$

$$JAC^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0452 & -0,004 \\ -0,004 & 0,046 \end{bmatrix}$$

4. Cálculo de ΔP_2 y ΔQ_2

$$\Delta P_2 = P_{2esp} - P_{2cal}$$

$$\Delta Q_2 = Q_{2esp} - Q_{2cal}$$

$$\Delta P_2 = -2 - 0 = -2 \quad \text{Donde } P_{2cal} = 0 \text{ (siempre ocurre en la primera iteración)}$$

$$\Delta Q_2 = -1 - (-0,19) = -0,81 \quad \text{Donde } Q_{2cal} = -0,81 \text{ (Debido al efecto shunt de la línea)}$$

5. Cálculo de las correcciones a la variables (INCOGNITAS)

$$\begin{bmatrix} \Delta q_2 \\ \frac{\Delta V_2}{V_2} \end{bmatrix} = [JAC]^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ -0,81 \end{bmatrix}$$

$$\Delta q_2 = -0,08707$$

$$\frac{\Delta V_2}{V_2} = -0,0453$$

$$q_{2N} = (0 - 0,08707) \text{ Rad} = -4,99^\circ$$

$$V_{2N} = 1 - 0,0453 = 0,9547$$

Y es única, se vuelve al paso (3), es decir a la construcción del jacobiano e inversión del mismo.

GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON

$$P_K = \sum_{i=1}^N V_K V_i (G_{Ki} \cos q_{ki} - B_{ki} \sin q_{ki})$$

$$Q_K = \sum_{i=1}^N V_K V_i (G_{Ki} \sin q_{ki} - B_{ki} \cos q_{ki})$$

Cuando se hacen los cálculos la barra de referencia se deja de última

	Barra (1)	Barra (2)	Barra (k)	
Barra (1)	H_{11}, N_{11} M_{11}, L_{11}	H_{12}, N_{12} M_{12}, L_{12}		Δq_1 $\Delta V_1 / V_1$
Barra (2)	H_{21}, N_{21} M_{21}, L_{21}			Δq_2 $\Delta V_2 / V_2$
Barra (k)	$\vdots$		H_{kk}, N_{kk} M_{kk}, L_{kk}	$\vdots$ Δq_k $\Delta V_k / V_k$ $\vdots$

Hay que hallar : H_{kk} , N_{kk} , M_{kk} , L_{kk} , H_{ki} , N_{ki} , M_{ki} , L_{ki} , donde $i \neq k$

$$i) H_{KK} = \frac{\partial P_K}{\partial q_K}$$

$$H_{KK} = \frac{\partial P_K}{\partial q_K} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N V_K V_i (-G_{Ki} \sin q_{ki} + B_{ki} \cos q_{ki})$$

Si $i = k$:

$$H_{KK} = B_{kk} V_k^2$$

$$H_{KK} = -B_{KK} V_K^2 - \sum_{i=1}^N V_K V_i (G_{Ki} \sin q_{ki} - B_{ki} \cos q_{ki})$$

$$H_{KK} = -B_{kk} V_k^2 - Q_K$$

Observe que el término $B_{kk} V_k^2$ es dominante.

$$ii) N_{KK} = V_K \times \frac{\partial P_K}{\partial V_K}$$

Excluyendo el término en $i = k$

$$N_{KK} = V_K \times \frac{\Re P_K}{\Re V_K}$$

$$N_{KK} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N V_i V_k (G_{ki} \cos q_{ki} + B_{ki} \sin q_{ki}) + 2V_k^2 G_{kk}$$

$$N_{KK} = V_k^2 G_{kk} + \sum_{i=1}^N V_i V_k (G_{ki} \cos q_{ki} + B_{ki} \sin q_{ki})$$

$$N_{KK} = G_{KK} V_K^2 + P_K$$

$$\text{iii) } M_{KK} = \frac{\Re Q_K}{\Re q_K}$$

$$\frac{\Re Q_K}{\Re q_K} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N V_i V_k (G_{ki} \cos q_{ki} + B_{ki} \sin q_{ki})$$

Si se hace $i = k$:

$$M_{KK} = V_K^2 (G_{kk} \cos(q_k - q_K) + B_{kk} \sin(q_k - q_K))$$

$$M_{KK} = G_{KK} V_K^2$$

$$M_{kk} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N V_i V_k (G_{ki} \cos q_{ki} + B_{ki} \sin q_{ki}) + G_{kk} V_k^2 - G_{kk} V_k^2$$

$$M_{kk} = \underbrace{\sum_{i=1}^N V_i V_k (G_{ki} \cos q_{ki} + B_{ki} \sin q_{ki})}_{P_k} + G_{kk} V_k^2 - G_{kk} V_k^2$$

$$M_{KK} = -G_{KK} V_K^2 + P_K$$

$$L_{KK} = V_K \frac{\Re Q_K}{\Re V_K}$$

$$L_{KK} = -B_{KK} V_K^2 + Q_K$$

$$H_{ki} = \frac{\partial P_K}{\partial q_i} = V_K V_i (G_{ki} \sin q_{ki} - B_{ki} \cos q_{ki})$$

$$N_{ki} = V_i \frac{\partial P_K}{\partial V_i} = V_K V_i (G_{ki} \cos q_{ki} + B_{ki} \sin q_{ki})$$

$$M_{ki} = \frac{\partial Q_K}{\partial q_i} = V_K V_i (-G_{ki} \cos q_{ki} - B_{ki} \sin q_{ki})$$

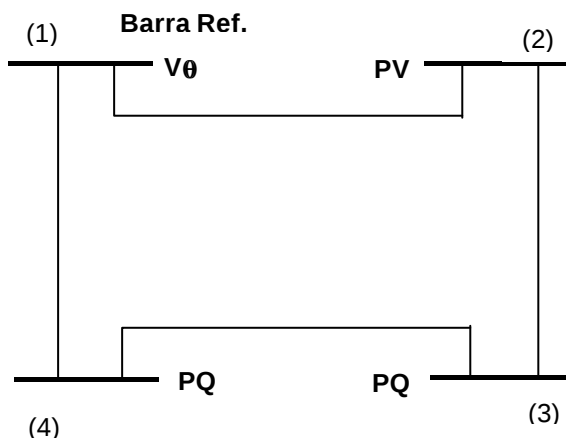
$$M_{ki} = -V_K V_i (G_{ki} \cos q_{ki} - B_{ki} \sin q_{ki})$$

$$L_{ki} = V_i \frac{\partial Q_K}{\partial V_i} = V_K V_i (G_{ki} \sin q_{ki} - B_{ki} \cos q_{ki})$$

Observe que el Jacobiano es altamente disperso

FOMA DEL JACOBIANO DE ACUERDO AL TIPO DE BARRA

Se ilustrará con un ejemplo:



Determinar la forma del jacobiano del sistema anterior

	B #1		B #2		B #3		B #4	
B #1	H ₁₁	N ₁₁	H ₁₂	N ₁₂	H ₁₃	N ₁₃	H ₁₄	N ₁₄
	M ₁₁	L ₁₁	M ₁₂	L ₁₂	M ₁₃	L ₁₃	M ₁₄	L ₁₄
B #2	H ₂₁	N ₂₁	H ₂₂	N ₂₂	H ₂₃	N ₂₃	H ₂₄	N ₂₄
	M ₂₁	L ₂₁	M ₂₂	L ₂₂	M ₂₃	L ₂₃	M ₂₄	L ₂₄
B #3	H ₃₁	N ₃₁	H ₃₂	N ₃₂	H ₃₃	N ₃₃	H ₃₄	N ₃₄
	M ₃₁	L ₃₁	M ₃₂	L ₃₂	M ₃₃	L ₃₃	M ₃₄	L ₃₄
B #4	H ₄₁	N ₄₁	H ₄₂	N ₄₂	H ₄₃	N ₄₃	H ₄₄	N ₄₄
	M ₄₁	L ₄₁	M ₄₂	L ₄₂	M ₄₃	L ₄₃	M ₄₄	L ₄₄

La Ecuación del sistema quedaría así :

	(2)	(3)	(4)		
(2)	H ₂₂	H ₂₃ N ₂₃	H ₂₄ N ₂₄	$\begin{bmatrix} \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \\ \frac{\Delta V_3}{V_3} \\ \Delta q_4 \\ \frac{\Delta V_4}{V_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta P_4 \\ \Delta Q_4 \end{bmatrix}$	
(3)	H ₃₂	H ₃₃ N ₃₃	H ₃₄ N ₃₄		
	M ₃₂	M ₃₃ L ₃₃	M ₃₄ L ₃₄		
(4)	H ₄₂	H ₄₃ N ₄₃	H ₄₄ N ₄₄		
	M ₄₂	M ₄₃ L ₄₃	M ₄₄ L ₄₄		

2. MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON DESACOPLADO (válido para alta tensión)

$$\begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta V/V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}$$

Para alta tensión

$$\theta_{ki} \leq 15^\circ$$

$$\cos \theta_{ki} \approx 1.0$$

$$\sin \theta_{ki} \approx 0.0$$

$$B_{ki} \gg G_{ki}$$

Sumandos dominantes:

$$B_{ki} \cos \theta_{ki}$$

$$\begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta V/V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} \quad \text{Simplificación del Jacobiano}$$

GENERALIZANDO

$$\begin{bmatrix} H_{11} & 0 & H_{12} & 0 & & & \\ 0 & L_{11} & 0 & L_{12} & & & \\ \hline H_{21} & 0 & & & & & \\ 0 & L_{21} & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & \\ \hline \vdots & & & & & & \\ & & & & H_{NN} & 0 & \\ & & & & 0 & L_{NN} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta V_1/V_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta V_2/V_2 \\ \vdots \\ \Delta q_N \\ \Delta V_N/V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta Q_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta P_N \\ \Delta Q_N \end{bmatrix}$$

Tenemos :

$$(1) H_{11} \Delta q_1 + H_{12} \Delta q_2 + \dots + H_{1N} \Delta q_N = \Delta P_1$$

$$(1)' L_{11} \frac{\Delta V_1}{V_1} + L_{12} \frac{\Delta V_2}{V_2} + \dots + L_{1N} \frac{\Delta V_N}{V_N} = \Delta Q_1$$

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1N} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ H_{N1} & H_{N2} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta P_N \end{bmatrix}$$

El orden de la matriz H_{NN} es el número de barras totales menos 1.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1N} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ L_{N1} & L_{N2} & \dots & L_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 / V_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta V_N / V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta Q_N \end{bmatrix}$$

El orden de la matriz L_{NN} es el número de barras de carga.

3. MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON DESACOPLADO RÁPIDO

$$H_{KK} = -B_{kk} V_k^2 - Q_K$$

$$H_{ki} = -V_k V_i (B_{ki} \cos q_{ki} - G_{ki} \sin q_{ki})$$

$$L_{KK} = -B_{kk} V_k^2 + Q_K$$

$$L_{ki} = -V_k V_i (B_{ki} \cos q_{ki} - G_{ki} \sin q_{ki})$$

El término dominante en un sistema de alta tensión sería :

$$H_{KK} \approx -B_{kk}$$

$$H_{ki} \approx -B_{ki}$$

$$L_{KK} \approx -B_{kk}$$

$$L_{ki} \approx -B_{ki}$$

$$[H] = - \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & B_{N3} & \dots & B_{NN} \end{bmatrix}}_{B'}$$

$$[H] = -[B']$$

$$[B'] \Delta q = \Delta P$$

Orden de la matriz : # de nodos totales – 1

$[B'] \Rightarrow [B] = -I_N [Y_N]$, se elimina la fila y la columna correspondiente a la barra de referencia.

$$[L] = - \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & B_{N3} & \dots & B_{NN} \end{bmatrix}}_{B''}$$

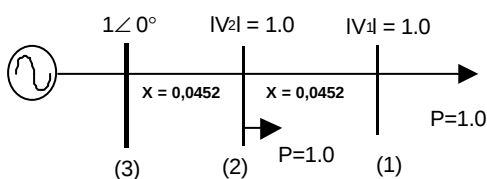
El orden de la matriz $[B'']$ es el número de nodos de carga.

$$[B''] \frac{\Delta V}{V} = \Delta Q$$

$$[B'] = -I_m [Y_N]$$

Para obtener la matriz B'' , se calcula $I_m [Y_N]$ y se eliminan las filas y las columnas correspondientes a barras de generación, incluyendo el nodo flotante.

Ejemplo :



Calcular las compensaciones requeridas para que :

$$|V_2| = 1.0$$

$$|V_1| = 1.0$$

Solución :

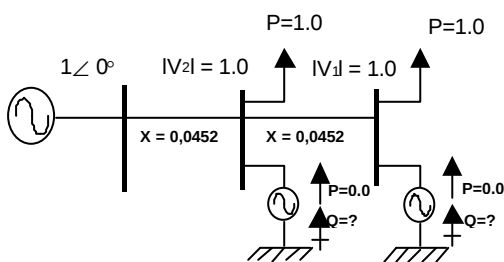
1. Calculo de $J B = Y_{\text{Barra}}$

$$[Y_{\text{BARRA}}] = -J \begin{bmatrix} 22,12 & -22,12 & 0 \\ -22,12 & 44,25 & -22,12 \\ 0 & -22,12 & 22,12 \end{bmatrix}$$

$$J[B] = J \begin{bmatrix} -22,12 & 22,12 & 0 \\ 22,12 & -44,25 & 22,12 \\ 0 & 22,12 & -22,12 \end{bmatrix}$$

2. Se halla la matriz B' ; el orden de esta matriz es : $N-1$, donde N es el número de barras, para este caso, $N-1 = 3-1 = 2$. Se elimina la fila y columna correspondiente a la barra de referencia.

$$[B'] = \begin{bmatrix} -22,12 & 22,12 \\ 22,12 & -44,25 \end{bmatrix}$$



$$[B']^{-1} = \begin{bmatrix} 0,09 & 0,045 \\ 0,045 & 0,045 \end{bmatrix}$$

3. Se corrigen los ángulos

$$\begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \end{bmatrix} = [B']^{-1} \begin{bmatrix} -1-0 \\ -1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,135 \\ -0,0904 \end{bmatrix} \text{Rad}$$

$$V_1 = 1.0 \angle -8^\circ$$

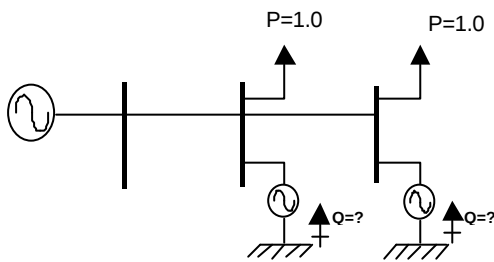
$$V_2 = 1.0 \angle -5,16^\circ$$

4. Para calcular la siguiente iteración se cambia el $P_{calculado}$

$$\Delta P_1 = -1 - (P_{1Cal})$$

$$\Delta P_2 = -1 - (P_{2Cal})$$

Suponiendo : $V_1 \angle \theta_1$, $V_2 \angle \theta_2$,



$$Q_k = \sum_{i=1}^3 V_k V_i (G_{ki} \sin q_{ki} - B_{ki} \cos q_{ki})$$

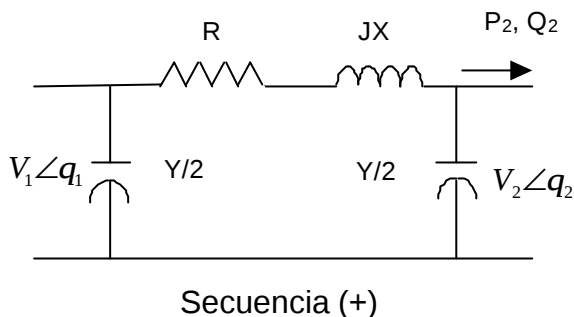
$$\text{Si : } Q_1 = 1.0$$

$$Q_k = Q_{neto} = Q_G - Q_C$$

En este problema no hay Q_{carga}

CALCULOS DE FLUJOS DE POTENCIA

Hay que disponer de los voltajes nodales $|V|$, θ .



En la figura :

$$P_2 + JQ_2 = \bar{S}_2$$

$$\bar{S}_2 = V_2 I_2^*$$

$$\bar{S}_2 = V_2 \angle q_2 \left[\frac{(V_1 \angle q_1 - V_2 \angle q_2)}{Z \angle f} - V_2 \angle q_2 \times \frac{Y}{2} \angle 90^\circ \right]^*$$

$$R + JX = Z \angle f$$

$$S_2 = \frac{V_1 V_2}{Z} \angle f - (q_1 - q_2) - \frac{V_2^2}{Z} \angle f + V_2^2 \frac{Y}{2} \angle 90^\circ$$

$$S_2 = P_2 + JQ_2$$

$$P_2 = \frac{V_1 V_2}{Z} \cos[f - (q_1 - q_2)] - \frac{V_2^2}{Z} \cos f$$

$$Q_2 = \frac{V_1 V_2}{Z} \sin[f - (q_1 - q_2)] - \frac{V_2^2}{Z} \sin f + V_2^2 \frac{Y}{2}$$

4. FLUJO DE CARGA DC (Opción DC)

- Considera el efecto reactivo de la línea
- No se consideran los flujos de reactivos
- Todos los voltajes $|V| = 1.0$ p.u
- Válido sólo en alta tensión
- La solución final es aproximada

- Únicamente interesan los flujos de potencia activa.

El punto de partida es el flujo de carga Newton – Raphson desacoplado rápido.

$$\Delta P = B' \Delta \theta$$

$$\Delta Q = B'' \Delta V/V$$

$$\Delta P = P_{\text{esp}} - P_{\text{cal}}$$

Nota : sólo se hace una iteración , $P_{\text{cal}} = 0$

$$\Delta P = P_{\text{esp}}$$

$$\Delta \theta = \theta$$

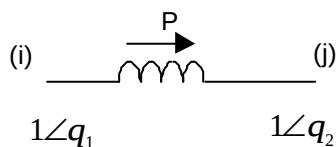
$$\theta = [B']^{-1} P_{\text{esp}}$$

Construcción de la matriz B'

$$B_{ii}' = \sum_i \frac{1}{X_i}$$

$$B_{ij}' = -\frac{1}{X_{ij}} \quad \text{Donde } X_{ij} \text{ es la reactancia existente entre } i \text{ y } j$$

El orden de la matriz B' : # nodos - 1



$$P_{ij} = \frac{q_1 - q_2}{X}$$

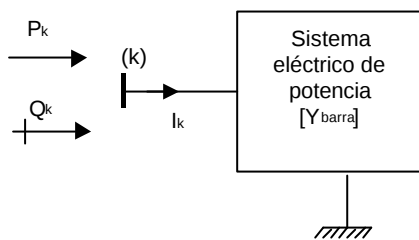
$$P_{ij} = \frac{\text{Sen}(q_1 - q_2)}{X}$$

5. MÉTODO DE GAUSS – SEIDEL

- No es necesario calcular el Jacobiano

- Converge lentamente, es decir, necesita muchas iteraciones para converger.
- Necesita bajos requerimientos de memoria
- En algunos casos no converge.

Algoritmo :



$$\bar{S}_K = P_K + JQ_K = \bar{V}_k \times \bar{I}_k^x$$

$$P_K - JQ_K = \bar{V}_k^x \times \bar{I}_k$$

$$[I] = [Y_N] [V_N]$$

$$I_k = \sum_{i=1}^N Y_{ki} V_i$$

$$P_k - JQ_k = V_k^x \sum_{i=1}^N Y_{ki} V_i$$

$$P_k - JQ_k = V_k^x \left[Y_{kk} V_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N Y_{ki} V_i \right]$$

$$\bar{V}_k = \frac{1}{Y_{kk}} \left[\frac{P_k - JQ_k}{V_k^x} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N Y_{ki} V_i \right]$$

Es lento para converger porque calcula un voltaje que depende del mismo voltaje.

METODOLOGÍA :

- Construir Y_{nodal}
- Asignar las semillas $V_k = 1.0$, $\theta_k = 0$, excepto para las barras de referencia y generación.

Si la barra es de carga, V_k se calcula según:

$$\bar{V}_k = \frac{1}{Y_{kk}} \left[\frac{P_k - JQ_k}{V_k^x} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N Y_{ki} V_i \right]$$

- Si la barra es de generación, previamente se calcula Q_k :

$Q_k = \sum_{i=1}^N V_k V_i (G_{ki} \sin q_{ki} - B_{ki} \cos q_{ki})$ y se aplica la fórmula :

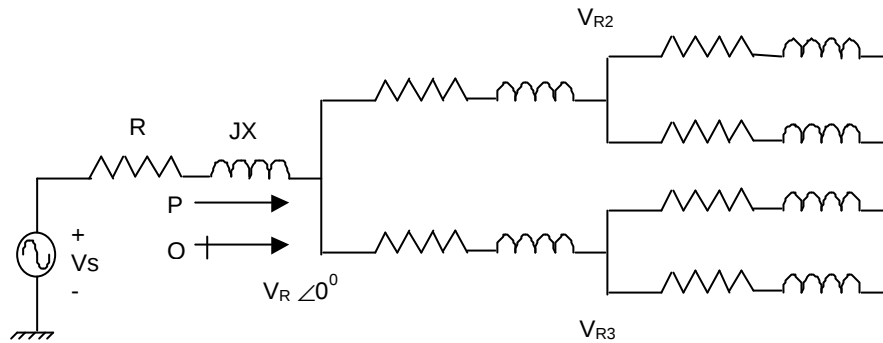
$$\bar{V}_k = \frac{1}{Y_{kk}} \left[\frac{P_k - JQ_k}{V_k^x} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N Y_{ki} V_i \right]; \text{ donde sólo se acepta la corrección de ángulo.}$$

- Se verifica la convergencia.

6. FLUJOS DE CARGA EN SISTEMAS RADIALES

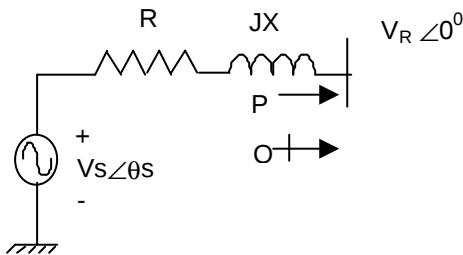
Se pueden hallar con los métodos anteriores, pero suele ocurrir que no convergen.

Elemento básico



Esquema de un sistema radial, alimentado básicamente por una fuente

Metodología de Renato Cespedes (sólo magnitudes de voltaje)



$$I = \frac{P - JQ}{V_R} = \frac{V_S \angle q_S - V_R \angle 0^\circ}{(R + jX)}$$

$$(P - jQ)(R + jX) = V_S V_R \angle q_S - V_R^2$$

$$(P - jQ)(R + jX) + V_R^2 = V_S V_R \angle q_S$$

$$(RP + XQ + V_R^2)^2 + (XP - PQ)^2 = V_S^2 V_R^2$$

$$R^2 P^2 + X^2 Q^2 + V_R^4 + 2RXPQ + 2RPV_R^2 + 2XQV_R^2 + X^2 P^2 + R^2 Q^2 - 2RXPQ - V_S^2 V_R^2 = 0$$

$$\boxed{V_R^4 + [2(RP + XQ) - V_S^2] V_R^2 + (P^2 + Q^2)(R^2 + X^2) = 0}$$

Forma de la ecuación : $V_R^4 + AV_R^2 + B = 0$

$$V_R = \sqrt{-\frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B}}$$

Pasos:

1. Cálculo de P_i , Q_i , ϕ_i , X_i
2. Antes de calcular los voltajes, se calculan las pérdidas
3. Se calcula $P(I)$ y $Q(I)$, según las fórmulas :

$$P(I) = P_{pro} + P_I + L_P$$

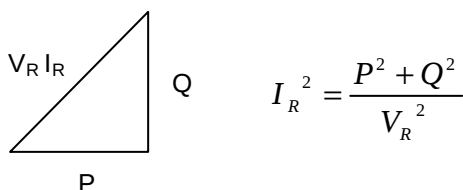
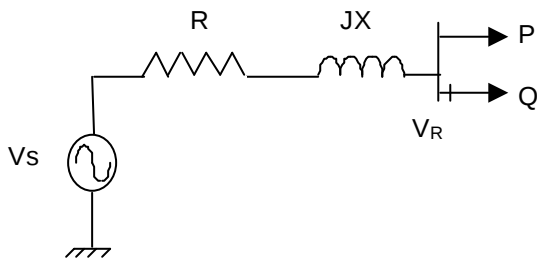
$$Q(I) = Q_{pro} + Q_I + L_q$$

4. Con $Q(I)$ se calcula V_R y se obtienen nuevas pérdidas.

El método converge según el epsilon escogido

$ABS(P - \text{Sumatoria de pérdidas}) > \xi$

Evaluación de pérdidas:



$$P_L = \frac{P^2 + Q^2}{V_R^2} \times R$$

$$Q_L = \frac{P^2 + Q^2}{V_R^2} \times X$$

Nota: El método converge rápido porque se conoce el flujo de potencia y el voltaje es muy cercano al de la fuente.

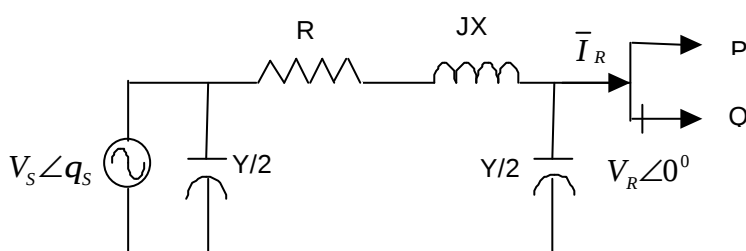
Metodología :

1. Se Calculan las pérdidas suponiendo un voltaje de 1.0 p.u
2. Se Calculan las potencias al final de cada tramo.
3. Se calculan los voltajes V_R a partir los voltajes V_S
4. Se repite el cálculo de pérdidas

Se continua el proceso hasta obtener convergencia.

A este método se le hacen las siguientes mejoras:

- Mejora al método de SÓLO MAGNITUD DE VOLTAJES



$$S_R = V_R \angle 0^\circ \left[\frac{V_S \angle q_s - V_R \angle 0^\circ}{Z \angle f} - V_R \frac{Y}{2} \angle 90^\circ \right]^*$$

$$S_R = \frac{V_S V_R}{Z} \angle (f - q_s) - \frac{V_R^2}{Z} \angle f + V_R^2 \frac{Y}{2} \angle 90^\circ$$

$$P_R = \frac{V_S V_R}{Z} \cos(f - q_s) - \frac{V_R^2}{Z} \cos f$$

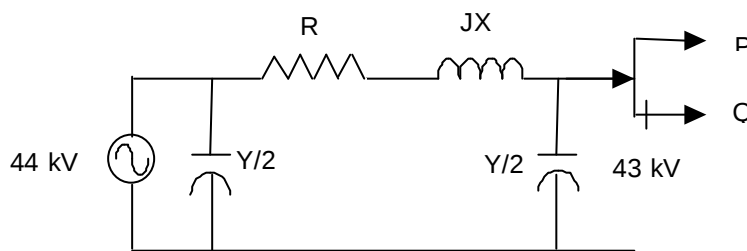
$$Q_R = \frac{V_S V_R}{Z} \sin(f - q_s) - \frac{V_R^2}{Z} \sin f + V_R^2 \frac{Y}{2}$$

Manipulando este par de ecuaciones para que desaparezca el ángulo:

$$\left(P_R + \frac{V_R^2}{Z} \cos f \right)^2 + \left(Q_R + \frac{V_R^2}{Z} \sin f - V_R^2 \frac{Y}{2} \right)^2 = \frac{V_S^2 V_R^2}{Z^2}$$

$$\left(Z P_R + V_R^2 \cos f \right)^2 + \left(Z Q_R + V_R^2 \sin f - Z \frac{Y}{2} V_R^2 \right)^2 = V_S^2 V_R^2$$

Ejemplo:



Despejar Q_R

De la ecuación se puede despejar

$V_R \Rightarrow$ Cuando Q_R es conocido

$Q_R \Rightarrow$ Cuando se fije V_R

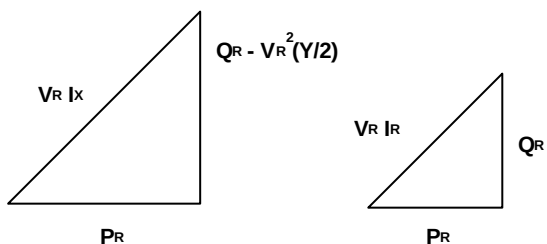
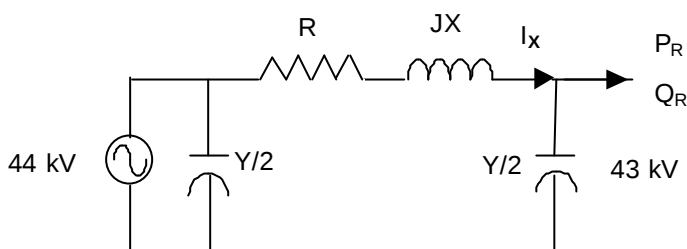
Despejando para V_R

$$V_R^4 + A V_R^2 + B = 0$$

$$A = \frac{2P_R Z \cos f - 2Q_R \left(Z^2 \frac{Y}{2} - Z \sin f \right) - V_S^2}{\cos^2 f + \left(-Z \frac{Y}{2} + \sin f \right)^2}$$

$$B = \frac{Z^2 (P_R^2 + Q_R^2)}{\cos^2 f + \left(\operatorname{Sen} f - Z Y / 2 \right)^2}$$

Cálculo de pérdidas



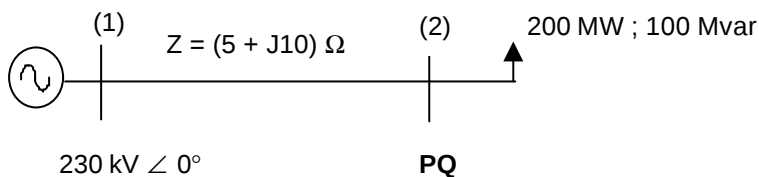
$$I_X^2 = \frac{P_R^2 + \left(Q_R - V_R^2 Y / 2 \right)^2}{V_R^2}$$

$$P_L = \frac{P_R^2 + \left(Q_R - V_R^2 Y / 2 \right)^2}{V_R^2} \times R$$

$$Q_L = \frac{P_R^2 + \left(Q_R - V_R Y / 2 \right)^2}{V_R^2} X - \underbrace{\left(V_S^2 + V_R^2 \right) \frac{Y}{2}}_{\text{INCURSIÓN DE UN NUEVO TÉRMINO}}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Utilizando el método de Gauss – Seidel, calcular los voltajes en la siguiente red :



- Verificar el resultado obtenido con el método de sólo magnitudes de voltaje

Solución:

1. Por el Método Gauss - Seidel

- Se construye la Ynodal

$$Y_N = \begin{bmatrix} 0,04 & -0,04 \\ -0,04 & 0,04 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} -0,08 & 0,08 \\ 0,08 & -0,08 \end{bmatrix}$$

- Si $k = 2$:

$$\bar{V} = \frac{1}{Y_{22}} \left[\frac{P_2 - jQ_2}{V_2^x} - \sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^N Y_{2i} V_i \right]$$

$$\bar{V}_2 = \frac{1}{Y_{22}} \left[\frac{P_2 - jQ_2}{V_2^x} - Y_{21} V_1 \right]$$

Se toma:

$$V_2 = 230 \text{ kV}$$

$$P_2 = 200 \text{ MW}$$

$$Q_2 = 100 \text{ Mvar}$$

$$\bar{V}_2 = \frac{1}{0,04 - j0,08} \left[\frac{-200 + j100}{230 \angle 0^\circ} - (-0,04 + j0,08) 230 \angle 0^\circ \right]$$

$$\vec{V}_2 = \frac{1}{0.0894 \angle -63.43^\circ} \left[\frac{223.61 \angle 153.43^\circ}{230 \angle 0^\circ} - 20.57 \angle 116.56^\circ \right]$$

$$\vec{V}_2 = 11.18 \angle 63.43^\circ [0.9722 \angle 153.43^\circ - 20.57 \angle 116.56^\circ]$$

$$\vec{V}_2 = 11.18 \angle 63.43^\circ [-0.8696 + j0.4347 + 9.197 - j18.399]$$

$$\vec{V}_2 = 11.18 \angle 63.43^\circ [8.3274 - j17.96]$$

$$\vec{V}_2 = 11.18 \angle 63.43^\circ \times 19.796 \angle -65.12^\circ$$

$$\vec{V}_2 = \underbrace{221.32 \angle -1.69^\circ}_{\text{PRIMERA ITERACIÓN}}$$

Segunda iteración:

$$V_2^x = 221.32 \angle 1.69^\circ$$

$$\vec{V}_2 = 220.85 \angle -1.69^\circ$$

$$\text{Error} = \frac{220.85 - 221.38}{221.38} \times 100\%$$

Error : 0,24%

2. Por el método de sólo magnitudes

$$V_R = \sqrt{-\frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B}}$$

$$A = 2(RP + XQ) - V_s^2$$

$$A = 2(5 \Omega \times 200 MW + 10 \Omega \times 100 M \text{ var}) - (230 kV)^2$$

$$A = -48900$$

$$B = (P^2 + Q^2)(R^2 + X^2)$$

$$B = ((200)^2 + (100)^2)((5)^2 + (10)^2)$$

$$B = 6250000$$

$$V_R = \sqrt{-\left(\frac{-48900}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{-48900}{2}\right)^2 - 6250000}}$$

$$V_R = 220,84 \text{ kV}$$

2. En el sistema anterior si se quiere mantener el voltaje en la barra (2) en 225 kV, calcular la compensación requerida.

Solución :

$$[X^2 + R^2]Q^2 + [2RXP + 2XV_R^2 - 2RXPQ]Q + [R^2P^2 + V_R^4 + 2RPV_R^2 + X^2P^2 - V_S^2V_R^2] = 0$$

Con el modelo π :

$$(ZP_R + V_R^2 \cos f)^2 + \left(ZQ_R + V_R^2 \sin f - Z \frac{Y}{2} V_R^2\right)^2 = V_S^2 V_R^2$$

$$Z = (5 + j10) \Omega = 11.18 \angle 63,43^\circ$$

$$(ZQ_R + V_R^2 \sin f)^2 = V_S^2 V_R^2 - (ZP_R + V_R^2 \cos f)^2$$

$$ZQ_R + V_R^2 \sin f = \left[V_S^2 V_R^2 - (ZP_R + V_R^2 \cos f)^2\right]^{1/2}$$

$$Q_R = \frac{\left[V_S^2 V_R^2 - (ZP_R + V_R^2 \cos f)^2\right]^{1/2} - V_R^2 \sin f}{Z}$$

$$V_S = 230 \text{ kV}$$

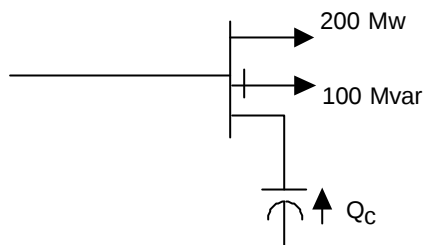
$$V_R = 225 \text{ kV}$$

$$Z = 11,18$$

$$P_R = 200 \text{ MW}$$

$$\phi = 63,43^\circ$$

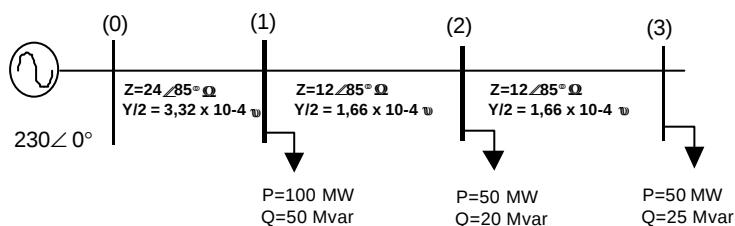
$$Q_R = 8,78 \text{ Mvar}$$



$$100 - Q_c = 8,78$$

$$Q_c = 100 - 8,78 = 91,22 \text{ Mvar}$$

3. Para el sistema de la figura calcular voltajes y pérdidas totales (activa y reactiva)



Solución:

Metodología:

1. Suponer voltajes (los de la fuente)
2. Calcular las pérdidas en las líneas
3. Calcular las potencias que se tendrán al final de cada tramo
4. Calcular voltajes
5. Cálculo de pérdidas $\left(\sum P_L, \sum Q_L \right)$
6. Chequear convergencia con sumatoria de pérdidas

6. ESTABILIDAD EN SISTEMAS DE POTENCIA

Tipos de estabilidad

Tipos de estudios Estabilidad transitoria ($t \leq 1$ seg)

Estabilidad dinámica ($1 \text{ seg} \leq t \leq 15 \text{ seg}$)

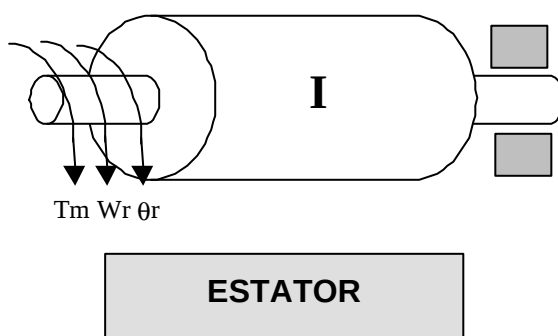
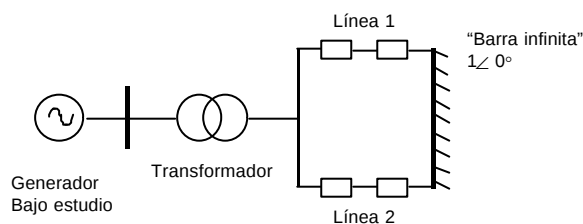
Estabilidad de régimen permanente

Parámetro: Tiempo crítico para que actúen las protecciones.

Se trabajará estabilidad transitoria

Configuración básica:

- Un generador
- Un sistema de transmisión y transformación conectados a un barraje infinito



Recordemos la segunda Ley de Newton para sistemas mecánicos en rotación:

$$\sum T = T_a = I\alpha \quad \text{Donde : } \alpha \text{ es la aceleración angular}$$

$$\sum T \cong T_m - T_e - T_{p\acute{e}didas} (\cong 0)$$

$$T_m - T_e = I_a = I \frac{dW_r}{dt} = I \frac{d^2 q_r}{dt^2}$$

$$(T_m - T_e) W_r = \left(I \frac{dW_r}{dt} \right) W_r$$

$$P_m - P_e = I W_r \frac{dW_r}{dt}$$

$$W_r = \frac{W_e}{p} \quad \text{Donde } p \text{ es el número de pares de polos}$$

$$E_c = \frac{1}{2} I W_r^2 \Rightarrow I W_r = \frac{2E_c}{W_r}$$

$$I W_r = \frac{2E_c}{W_e} p$$

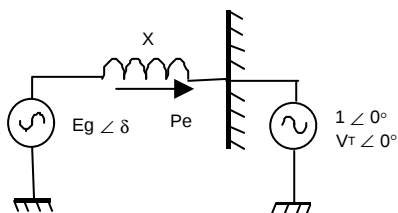
$$P_m - P_e = \frac{2E_c p}{W_e} \times \frac{dW_e}{dt} \times \frac{1}{p}$$

$$P_m - P_e = \frac{2E_c}{2p f} \times \frac{dW_e}{dt} = \frac{E_c}{p f} \times \frac{dW_e}{dt}$$

$$W_e = W_s + W \quad \text{Las variaciones de } W \text{ son de alrededor de } 377 \text{ rad/seg}$$

$$P_m - P_e = \frac{E_c}{p f} \times \frac{dW}{dt}$$

$$P_m - P_e = \frac{E_c}{p f} \times \frac{d^2 d}{dt^2}$$



V_T es el voltaje terminal. Se toma generalmente como 1.0 p.u

$$Pe = \frac{E_g V_T}{X} \sin d \quad \text{ECUACIÓN DE PENDULEO}$$

S_B = Potencia base para un sistema 3 ϕ

$$\frac{P_m}{S_B} - \frac{P_e}{S_B} = \frac{E_c}{S_B} \frac{d^2 d}{p f dt^2}$$

$$\frac{P_e}{S_B} = \frac{E_g \left(\frac{V_T}{X} \right)}{\left(\frac{V_B \times V_B}{Z_B} \right)} \sin d$$

$$Pe_{p.u} = \left(\frac{E_g}{V_B} \times \frac{V_T}{V_B} \times \frac{X}{Z_B} \right) \sin d$$

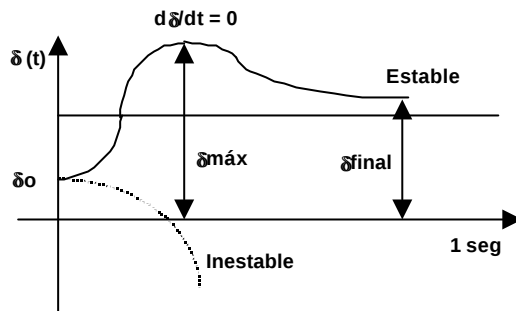
$$Pe_{p.u} = \frac{E_g(p.u) \times V_T(p.u)}{X(p.u)} \sin d$$

$$\frac{E_c}{S_B} = H [=] \text{seg} \quad \text{La suministran los fabricantes}$$

$$P_m - \frac{E_g V_T}{X} \sin d = \frac{H}{p f} \frac{d^2 d}{dt^2}$$

Esta ecuación se resuelve por métodos numéricos.

Si existe un cambio en la potencia eléctrica, se presenta una inestabilidad.



Criterio de Áreas iguales para determinar estabilidad absoluta

Si $d\delta/dt = 0$ el sistema es estable.

$$P_m - P_e = \frac{H}{p f} \frac{d^2 d}{dt^2}$$

Se define : $Z = \frac{dd}{dt}$

$$\frac{d^2 d}{dt^2} = \frac{dZ}{dt} \times \frac{dd}{dd} = Z \frac{dZ}{dd}$$

$$P_m - P_e = \frac{H}{p f} Z \frac{dZ}{dd}$$

$$Z dZ = \frac{p f}{H} (P_m - P_e) dd$$

$$\int_0^Z Z dZ = \frac{p f}{H} \int_{d_0}^{d_f} (P_m - P_e) dd$$

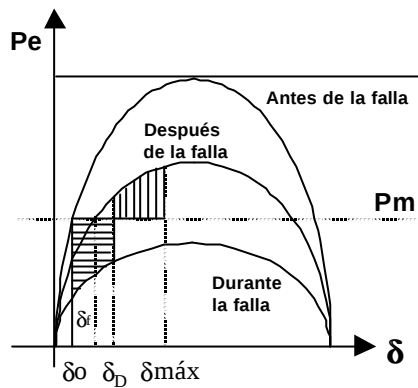
$$\frac{1}{2} Z^2 = \frac{p f}{H} \int_{d_0}^{d_f} (P_m - P_e) dd$$

$$\frac{dd}{dt} = Z = \sqrt{\frac{2p f}{H} \int_{d_0}^{d_f} (P_m - P_e) dd}$$

Criterio de estabilidad :

$$\boxed{\int_{d_0}^{d_f} (P_m - P_e) dd = 0}$$

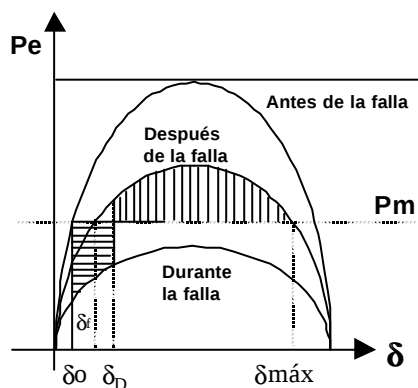
Metodología a Seguir



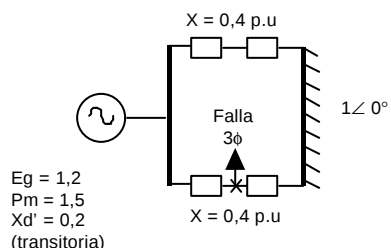
δ_o : Ángulo inicial

δ_D : Ángulo de despeje de la falla (funcionan las protecciones)

Metodología para determinar el δ crítico o de despeje de falla (metodología para determinar si el sistema es estable o no)



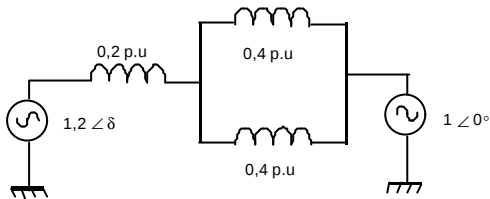
Ejemplo :



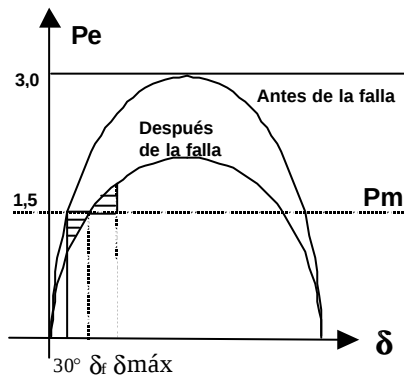
1. Determinar si el sistema es estable cuando la falla se despeja instantáneamente.
Si es estable, determinar los ángulos asociados δ_f , $\delta_{\text{máx}}$
2. Calcular el ángulo crítico $\delta_{\text{crítico}}$ y δ_D

Solución :

Antes de la falla (secuencia positiva):



$$P_e = \frac{1,2 \times 1,0}{0,6} \text{Send} = 2 \text{Send}$$



$$\int_{\delta_0=30^\circ}^{\delta_{\text{máx}}} (1,5 - 2 \text{Send}) d\delta = 0$$

$$1,5\delta \Big|_{\delta_0}^{\delta_{\text{máx}}} + 2 \text{Cos}\delta \Big|_{\delta_0}^{\delta_{\text{máx}}} = 0$$

Estabilidad Transitoria:

➤ Ecuación de Penduleo :

$$\boxed{\frac{H}{p f_0} \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} = P_m - \frac{E_g V_T}{X} \text{Send}(t)}$$

➤ Tiempo crítico para despejar la falla.

Hay dos métodos :

1. Mediante ecuaciones aproximadas que dan una solución exacta cuando la potencia acelerante es constante.

La potencia acelerante es constante cuando hay una falla 3 ϕ en el punto de generación, ya que la potencia eléctrica es cero y la potencia mecánica es una constante.

Si la potencia acelerante no es constante, la solución por fórmula es una aproximación.

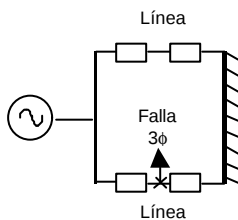
2. Resolviendo la ecuación de penduleo y determinando el tiempo crítico de despeje de falla por tanteo.

CASOS:

1. Si $P_a = \text{cte}$

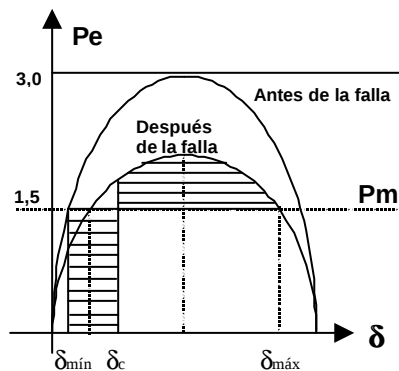
$$P_a = P_m - P_e$$

$$P_e = 0 \text{ (falla } 3\phi \text{ en el punto de generación)}$$



$$P_a = \frac{H}{p \cdot f_o} \frac{d^2 d(t)}{dt^2} \quad (1)$$

Ángulo crítico de despeje de falla



$$\int_{d_0}^{d_c} P_m dd + \int_{d_c}^{d_{\max}} (P_m - P_{\max} \sin d) dd = 0$$

$$P_m (d_c - d_0) + P_m (d_{\max} - d_c) + P_{\max} (\cos(d_{\max}) - \cos d_c) = 0$$

$$- P_m d_0 + P_m d_{\max} + P_{\max} \cos d_{\max} - P_{\max} \cos d_c = 0$$

$$d_c = \cos^{-1} \frac{P_m (d_{\max} - d_0) + P_{\max} \cos d_{\max}}{P_{\max}}$$

De la Ecuación (1) :

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{p f_o}{H} \times P_a$$

$$dW(t) = \frac{p f_o}{H} \times P_a dt$$

$$\int_0^W dW(t) = \frac{p f_o}{H} \int_0^t P_a dt$$

$$W(t) = \frac{p f_o}{H} P_a t \quad W(t) = \frac{dd}{dt}$$

$$\frac{dd}{dt} = \frac{p f_o}{H} P_a t$$

$$\int_{d_0}^{d_c} dd = \frac{p f_o}{H} \int_0^{t_c} P_a t dt$$

$$(d_c - d_0) = \frac{p f_o}{H} \times \frac{1}{2} \times P_a \times t_c^2$$

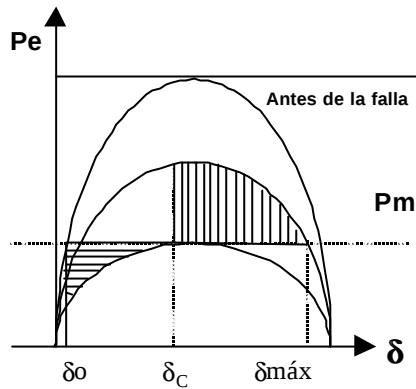
$$t_c = \sqrt{\frac{2(d_c - d_0)H}{p f_o P_a}}$$

2. Cuando $P_e \neq 0$ (durante la falla)

P_a no es una constante

$$P_a = P_m - \frac{V_T E_g}{X} \text{Send}$$

Primero se hace una aproximación con un promedio de P_a



$$P_a = \frac{1}{(d_c - d_o)} \int_{d_o}^{d_c} (P_m - P_{\text{máx}} \text{Send}) dd$$

$$t_c = \sqrt{\frac{2H(d_c - d_o)}{p \text{ fo } P_a}}$$

3. La manera exacta de calcular t_c es resolviendo la ecuación por algún método numérico.

$$\frac{H}{p \text{ fo}} \frac{d^2 d(t)}{dt^2} = P_m - P_{\text{máx}} \text{Send}(t)$$

Método de Euler

Método de Integración trapezoidal

Por el método de integración trapezoidal se llega a la siguiente ecuación :

$$(1) d(t + \Delta t) = d(t) + W(t) \times \Delta t + \frac{\Delta t^2 \times p \text{ fo}}{4H} [2P_m - P_{\text{máx}} \text{Send}(t) - P_{\text{máx}} \text{Send}(t + \Delta t)]$$

$$(2) W(t + \Delta t) = d(t) = W(t) + \frac{\Delta t \times p \text{ fo}}{2H} [2P_m - P_{\text{máx}} \text{Send}(t) - P_{\text{máx}} \text{Send}(t + \Delta t)]$$